M2

Kim Timothy Engh

med Thomas Håland, Martin T. Øksnes & Teodor N. Aune

Halvere og Kvadrere

Eksempel:

Starter med uttrykket:	$x^2+6x+17=0$
Halverer og kvadrerer:	$x^2+\underbrace{2\cdot 3x}_{\text{Halvere}}\underbrace{+3^2-3^2}_{\text{Kvadrere}}+17=0$
Summerer:	$x^2+6x+9+8=0$
Faktoriserer:	$(x+3)^2+8=0$

Enkel faktorisering av 2.gradslikn. med komplekse røtter

Hvis likningen Ax^2+Bx+C har røtter $x=a\pm bi$
kan den faktoriseres som $A((x-a)^2+b^2)$

Delbrøksoppspalting

Eksempel:

Starter med uttrykket:	$\dfrac{3s^2+s+8}{s^3+4s}$
Former om nevner:	$\dfrac{3s^2+s+8}{s(s^2+4)}$
Splitter opp:	$\dfrac{3s^2+s+8}{s(s^2+4)}=\dfrac{A}{s}+\dfrac{Bs+C}{(s^2+4)}$

Ganger alle ledd med fellesnevner, $s(s^2+4)$, og former om uttrykket til dette: $3s^2+s+8=s^2\underbrace{(A+B)}_{=3}+\underbrace{Cs}_{=1}+\underbrace{4A}_{=8}$;
Setter opp matrise;

$$\begin{bmatrix}1&1&0&3\\0&0&1&1\\4&0&0&8\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}A=2\\B=1\\C=1\end{matrix}\Rightarrow\frac{3s^2+s+8}{s(s^2+4)}=\frac{2}{s}+\frac{s+1}{(s^2+4)}$$

Tabel for omforming av nevner til delbrøkoppspalting

Faktor i nevner:	Delbrøk:
$(s-\alpha)^n$	$\dfrac{A_n}{(s-\alpha)^n}+\dfrac{A_{n-1}}{(s-\alpha)^{n-1}}+\cdots+\dfrac{A_1}{(s-\alpha)}$
$(s+\alpha)^n+\omega$	$\dfrac{As+B}{(s+\alpha)^n+\omega}$
$s^2+\omega^2$	$\dfrac{Bs+C}{s^2+\omega^2}$
$(s^2+\omega^2)^n$	$\dfrac{B_ns+C_n}{(s^2+\omega^2)^n}+\dfrac{B_{n-1}s+C_{n-1}}{(s^2+\omega^2)^{n-1}}+\cdots+\dfrac{B_1s+C_1}{s^2+\omega^2}$

Matriser

Enkel matrise likning:

$A\cdot\vec{x}=\vec{b}$

$$\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$$

Setter opp argumentert matrise

$$\begin{bmatrix}a\cdot x_1&b\cdot x_2&c\cdot x_3=b_1\\d\cdot x_1&e\cdot x_2&f\cdot x_3=b_2\\g\cdot x_1&h\cdot x_2&i\cdot x_3=b_3\end{bmatrix}$$

Løser på vanelig måte

Invers Matrise:

vs=M hs=I

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}a&b&c&1&0&0\\d&e&f&0&1&0\\g&h&i&0&0&1\end{array}\right]$$

Utfører rad operasjoner

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&j&k&l\\0&1&0&m&n&o\\0&0&1&p&q&r\end{array}\right]$$

vs=I hs=M^{-1}

Eksponentialligning

Generell Form:	$Q(t)=Ce^{-kt}$
Halveringstid:	$\tau=\frac{ln2}{k}$
Konstant:	$k=\frac{ln2}{\tau}$

Differensial Likninger

Diff. likninger kan løses med **klassisk medtode** eller med **lapace**.

Klassisk metode (2. orden)

1. Sett opp **karakteristisk likning** der $y^{n,\text{derivert}}$ er r^n. Løs deretter likningen og finn r_k.
2. Finn y_c ved å kovertere $r_k\Rightarrow y_k$, der n er antall ganger et identisk ledd har vært tidligere. En konstant, C, skal med i hvert ledd.

$$\begin{aligned}r_k&=a &&\Rightarrow\quad y_k=t^n\cdot e^{at}\\ r_k&=a+b\mathbf{i} &&\Rightarrow\quad y_k=t^n\cdot e^{at}cos(bt)\\ r_k&=a-b\mathbf{i} &&\Rightarrow\quad y_k=t^n\cdot e^{at}sin(bt)\end{aligned}\qquad W(t)=\begin{bmatrix}y_1&y_2\\y_1'&y_2'\end{bmatrix}$$

3. Finn **Wronski determinanten.**
4. Finn y_p med formelen, der $f(t)$ er summen av likningen. Ingen konstanter skal med, selv etter integrasjon.
Om $f(t)=0$ så er $y_p=0$

$$y_p=y_{c1}\int\frac{-y_{c2}\cdot f(t)}{W(t)}\mathrm{d}t+y_{c2}\int\frac{y_{c1}\cdot f(t)}{W(t)}\mathrm{d}t$$

5. Sett opp den **hetrogene diff. likningen**, $y=y_c+y_p$.
6. Bruk **initial verdier** for å løse ut **konstantene.**

Laplace Transformasjon

Laplace kan løses per definisjon eller med tabell.
Definisjon:

$$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

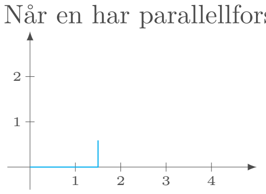
Blir ikke laplace invers per defininsjon på eksamen.
Tabell:

t-verden	s-verden
y	Y
y'	$sY-y(0)$
y''	$s^2Y-s\cdot y(0)-y'(0)$

Bruk Trondals, Haugans eller Rottmans formelsamling for ferdig transformerte uttrykk.

Parallellforskyning

Når en har parallellforskyvning er det to utgangspunkt:

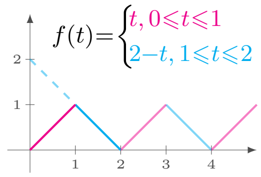


$$\mathcal{L}\{e^{at}\cdot f(t)\}=F(s-a)$$

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\cdot u(t-a)\}=e^{-as}\cdot F(s)$$

Se tabell for parallellforskyvning i Trodals formelhefte

Laplace transformasjon av periodisk funksjon



$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{\int_0^T f(t)\cdot e^{-ts}\mathrm{d}t}{1-e^{-Ts}}$$

T er en hel periode.

Hvis $g(t)$ er et utsnitt av én periode T
fra en periodisk funksjon $f(t)$ er $\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{g(t)\}\cdot\frac{1}{1-e^{-Ts}}$

Hvis $g(t)$ er en periodisk utvidelse av $f(t)$ med periode T, og $f(t)=0$ når $t>T$ så er $\mathcal{L}\{f(t)\}=(1-e^{-Ts})\cdot\mathcal{L}\{g(t)\}$

System av diff. likninger

$$Y(s)=(sI-A)^{-1}[y(0)+G(s)]$$

Fourier Rekke

Generel def. der $f(t); a, a+2L$, og $L=\frac{1}{2}$ periode:

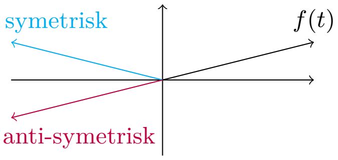
$$f(t)=\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\frac{\pi}{L}t)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\frac{\pi}{L}t)$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_a^{a+2L}f(t)\cos(n\frac{\pi}{L}t)\mathrm{d}t\qquad b_n=\frac{1}{L}\int_a^{a+2L}f(t)\sin(n\frac{\pi}{L}t)\mathrm{d}t$$

Fourier Rekke mhp symetri

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos(n\frac{\pi}{L}t)\mathrm{d}t$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\sin(n\frac{\pi}{L}t)\mathrm{d}t$$



En symetrisk likning vil kun ha et a_n og enventuelt et a_0 ledd i Fourier rekken, mens en **Anti-symetrisk** likning vil kun ha et b_n ledd.

-

Lineære transformasjoner

Basis

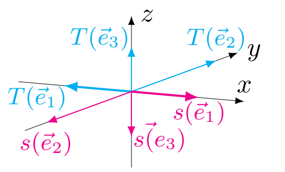
$$A = \left[T\vec{e_1} \vdots T\vec{e_2} \vdots \cdots \vdots T\vec{e_n}\right]$$

Transformasjon i rommet $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Her speiler man hver enkelt vektor hver for seg, så summerer vektorene sammen til en matrisen F.

$$T(\vec{e}_1)\begin{bmatrix}-9\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow S(\vec{e}_1)\begin{bmatrix}9\\0\\0\end{bmatrix}$$

Transformerer vektoren $T(\vec{e_1})$.
som speiles over origo



Konvertering fra 3 til 2 dimensjoner $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$T\left(\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}100c\\b-a\end{bmatrix}$$

Eksempel på formel.

Formelen brukes en gang for hver vektor så summeres til en matrise med navn G.

Sammensettnig $(R = T \cdot S)$

Finn standard matrise H

$$\begin{matrix} R & = & T & \cdot & S \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H & = & G & \cdot & F \end{matrix}$$

Bernoulli ligninger

Er diff.ligninger som kan skrives på formen: $y' + p(t)\cdot y = q(t)\cdot y^n$
Løses ved variabelskifte

$v = y^{1-n}$	$v' + (1-n)p(t)\cdot v = (1-n)q(t)$
	- løs som vanlig 1. ordens lineær diff.lign.
$y = v^{\frac{1}{1-n}}$	- endre variabelskiftet tilbake til y

1. ordens eksakte differensialligninger

Ligninger som kan skrives på formen: $N(t,y)\cdot y' + M(t,y) = 0$
Ligningen er eksakt hvis (og bare hvis): $\frac{\delta N}{\delta t} = \frac{\delta M}{\delta y}$
Løsning:

Metode	*Eksempel*
0) Skriv opp	0) $\underbrace{2(t+1)y}_{\text{N}} \cdot y' + \underbrace{1+y^2}_{\text{M}} = 0$
1) Finn $H = \int M\ dt$	1) $H = \int(1+y^2)\ dt = (1+y^2)t + C(y)$
2) Bruk at $\frac{\delta H}{\delta y} = N$	2) $\frac{\delta}{\delta y}[(1+y^2)t + C(y)] = 2yt + C'(y) = N$
	$2yt + C'(y) = 2(t+1)y$
	$C'(y) = 2yt + 2y - 2yt = 2y$
3) Finn $C(y)$	3) $C(y) = \int 2y\ dy$
	$C(y) = y^2 + C$
4) Sett inn for $C(y)$	4) $H = (1+y^2)t + y^2 + C$
5) Sett $H = 0$ og svar implisitt	5) $(1+y^2)t + y^2 + C = 0$
	$\underline{\underline{y^2(t+1) = -t - C}}$
eller løs for y	$\underline{\underline{y = \pm\sqrt{\frac{-t-C}{t+1}}}}$ (evt. løs initialveriproblem)

Viktig å huske

$\sin(n\pi) = 0$ $\quad\cos(n\pi) = (-1)^n$ $\quad -(-1)^n = (-1)^{n+1}$

$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$ $\quad\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}(\cos(2\alpha)+1)$

Referanser
Haugan, J, *Formler og Tabeller* (2011), NKI Forlaget.
Kohler, W & Johnson, L , *Elementary differential equations* (2006), Pearson.
Nyberg, S, O, *Forelensningsnotater matte 2* (2012/2013), UiA.

Om formelarket
Laget for å være til hjelp på matte 2 eksamen som det ene arket som er lov til å ha med utenom godkjente formelsamlinger. Det tas forbehold om eventuelle feil eller mangler.