M2

Kim Timothy Engh
med Thomas Håland & Martin T. Øksnes

Halvere og Kvadrere

Eksempel:

Starter med uttrykket:	$x^2+6x+17=0$
Halverer og kvadrerer:	$x^2+\underbrace{2\cdot 3x}_{\text{Halvere}}\underbrace{+3^2-3^2}_{\text{Kvadrere}}+17=0$
Summerer:	$x^2+6x+9+8=0$
Faktoriserer:	$(x+3)^2+8=0$

Delbrøksoppspalting

Eksempel:

Starter med uttrykket:	$\dfrac{3s^2+s+8}{s^3+4s}$
Former om nevner:	$\dfrac{3s^2+s+8}{s(s^2+4)}$
Splitter opp:	$\dfrac{3s^2+s+8}{s(s^2+4)}=\dfrac{A}{s}+\dfrac{Bs+C}{(s^2+4)}$

Ganger alle ledd med fellesnevner, $s(s^2+4)$, og former om uttrykket til dette: $3s^2+s+8=s^2(\underbrace{A+B}_{=3})+\underbrace{Cs}_{=1}+\underbrace{4A}_{=8}$;
Setter opp matrise;

$$\begin{bmatrix}1&1&0&3\\0&0&1&1\\4&0&0&8\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}A=2\\B=1\\C=1\end{matrix}\Rightarrow\frac{3s^2+s+8}{s(s^2+4)}=\underline{\frac{2}{s}+\frac{s+1}{(s^2+4)}}$$

Tabel for omforming av nevner til delbrøkoppspalting

Faktor i nevner:	Delbrøk:
$(s-\alpha)^n$	$\dfrac{A_n}{(s-\alpha)^n}+\dfrac{A_{n-1}}{(s-\alpha)^{n-1}}+\cdots+\dfrac{A_1}{(s-\alpha)}$
$(s+\alpha)^n+\omega$	$\dfrac{As+B}{(s+\alpha)^n+\omega}$
$s^2+\omega^2$	$\dfrac{Bs+C}{s^2+\omega^2}$
$(s^2+\omega^2)^n$	$\dfrac{B_ns+C_n}{(s^2+\omega^2)^n}+\dfrac{B_{n-1}s+C_{n-1}}{(s^2+\omega^2)^{n-1}}+\cdots+\dfrac{B_1s+C_1}{s^2+\omega^2}$

Matriser

Enkel matrise likning:

$A\cdot\vec{x}=\vec{b}$

$$\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$$

Setter opp argumentert matrise

$$\begin{bmatrix}a\cdot x_1&b\cdot x_2&c\cdot x_3=b_1\\d\cdot x_1&e\cdot x_2&f\cdot x_3=b_2\\g\cdot x_1&h\cdot x_2&i\cdot x_3=b_3\end{bmatrix}$$

Løser på vanelig måte

Invers Matrise:

vs=M hs=I

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}a&b&c&1&0&0\\d&e&f&0&1&0\\g&h&i&0&0&1\end{array}\right]$$

Utfører rad operasjoner

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&j&k&l\\0&1&0&m&n&o\\0&0&1&p&q&r\end{array}\right]$$

vs=I hs=M^{-1}

Eksponentialligning

Generell Form:	$Q(t)=Ce^{-kt}$
Halveringstid:	$\tau=\frac{ln2}{k}$
Konstant:	$k=\frac{ln2}{\tau}$

Differensial Likninger

Diff. likninger kan løses med **klassisk medtode** eller med **lapace**.

Klassisk metode (2. orden)

1. Sett opp karakteristisk likning der $y^{n,\text{derivert}}$ er r^n. Løs deretter likningen og finn r_k.
2. Finn y_c ved å kovertere $r_k\Rightarrow y_k$, der n er antall ganger et identisk ledd har vært tidligere. En konstant, C, skal med i hvert ledd.

$$\begin{aligned}r_k=a&\Rightarrow y_k=t^n\cdot e^{at}\\r_k=a+b\mathbf{i}&\Rightarrow y_k=t^n\cdot e^{at}cos(bt)\\r_k=a-b\mathbf{i}&\Rightarrow y_k=t^n\cdot e^{at}sin(bt)\end{aligned}\qquad W(t)=\begin{bmatrix}y_1&y_2\\y_1'&y_2'\end{bmatrix}$$

3. Finn **Wronski determinanten.**
4. Finn y_p med formelen, der $f(t)$ er summen av likningen. Ingen konstanter skal med, selv etter integrasjon.
Om $f(t)=0$ så er $y_p=0$

$$y_p=y_{c1}\int\frac{-y_{c2}\cdot f(t)}{W(t)}\text{dt}+y_{c2}\int\frac{y_{c1}\cdot f(t)}{W(t)}\text{dt}$$

5. Sett opp den **hetrogene diff. likningen**, $y=y_c+y_p$.
6. Bruk **initial verdier** for å løse ut **konstantene.**

Laplace Transformasjon

Laplace kan løses per definisjon eller med tabell.
Definisjon:

$$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^\infty f(t)e^{-st}\text{dt}$$

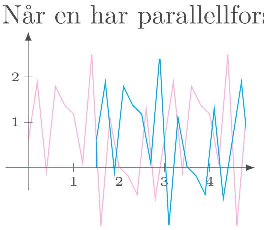
Blir ikke laplace invers per defininsjon på eksamen.
Tabell:

t-verden	s-verden
y	Y
y'	$sY-y(0)$
y''	$s^2Y-s\cdot y(0)-y'(0)$

Bruk Trondals, Haugans eller Rottmans formelsamling for ferdig transformerte uttrykk.

Parallellforskyning

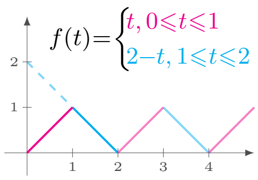
Når en har parallellforskyvning er det to utgangspunkt:



$$\mathcal{L}\{e^{at}\cdot f(t)\}=F(s-a)$$
$$\mathcal{L}\{f(t-a)\cdot u(t-a)\}=e^{-as}\cdot F(s)$$

Se tabell for parallellforskyvning i Trodals formelhefte

Laplace transformasjon av periodisk funksjon



$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{\int_0^T f(t)\cdot e^{-ts}\text{dt}}{1-e^{Ts}}$$

T er en hel periode.

System av diff. likninger

$$Y(s)=(sI-A)^{-1}[y(0)+G(s)]$$

Fourier Rekke

Generel def. der $f(t);a,a+2L$, og $L=\frac{1}{2}$ periode:

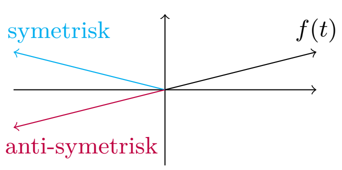
$$f(t)=\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\frac{\pi}{L}t)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\frac{\pi}{L}t)$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_a^{a+2L}f(t)\cos(n\frac{\pi}{L}t)\text{dt}\qquad b_n=\frac{1}{L}\int_a^{a+2L}f(t)\sin(n\frac{\pi}{L}t)\text{dt}$$

Fourier Rekke mhp symetri

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos(n\frac{\pi}{L}t)\text{dt}$$

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(t)\sin(n\frac{\pi}{L}t)\text{dt}$$



En symetrisk likning vil kun ha et a_n og enventuelt et a_0 ledd i Fourier rekken, mens en **Anti-symetrisk** likning vil kun ha et b_n ledd.

Varmelikning

For at en likning kan defineres som varmelikning er man avhengig av 3 premisser: $u_t = k \cdot u_{xx}$, $u(0,x) = f(x)$ og $\underbrace{u(t,0) = u(t,l) = 0}_{\text{Teorem 1}}$ eller $\underbrace{u_x(t,0) = u_x(t,l) = 0}_{\text{Teorem 2}}$.

Teorem 1: $u(t,0) = u(t,l) = 0$, 0^o ved endepunkter;

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \cdot t} \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$$

Der b_n er identisk til b_n fra en anti-symetrisk fourier rekke der t er erstattet med x.

Teorem 2: $u_x(t,0) = u_x(t,l) = 0$, isolerte endepunkter;

$$u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \cdot t} \cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$$

Der a_n er identisk til a_n fra en symetrisk fourier rekke der t er erstattet med x.

Triks:

Om $a_n/b_n = 0$ så er man nødt til å gjøre et triks. Eksempel med utgangspunkt i oppgave 9.5-5 (Edwards/Penny):

$$u(x,0) = 4\cos\left(\frac{2}{3}\pi x\right) - 2\cos\left(\frac{4}{3}\pi x\right) \qquad \begin{array}{r} u_t = 2u_{xx} \\ 0 < x < 3 \\ t > 0 \end{array}$$

Ut fra likningen $u(x,0)$ kan vi se at de to a_n leddene i svaret skal være 4 og 2, og vi ser at innholdet cos leddene er ulike. Det vi så gjør er å utlede rekken for $u(t,x)$ hvor vi så kaller an-leddene for a_1, a_2, a_3, a_4 osv, slik som dette:

$$a_1 \cdot e^{-2\left(\frac{1}{3}\pi\right)^2 \cdot t} \cos\left(\frac{1}{3}\pi x\right) + a_2 \cdot e^{-2\left(\frac{2}{3}\pi\right)^2 \cdot t} \cos\left(\frac{2}{3}\pi x\right)$$

$$+ a_3 \cdot e^{-2\left(\frac{3}{3}\pi\right)^2 \cdot t} \cos\left(\frac{3}{3}\pi x\right) + a_4 \cdot e^{-2\left(\frac{4}{3}\pi\right)^2 \cdot t} \cos\left(\frac{4}{3}\pi x\right) ...osv$$

Nå sammenligner vi rekken med leddene i $u(x,0)$. Vi ser at a_2- og a_4-leddene har det samme innholdet inne i cos-leddene som i $u(x,0)$. Vi 'smelter' sammen a_2/a_4 med $u(x,0)$ slik som dette:

$$\overbrace{4}^{\text{fra } u(0,x)} \cdot \underbrace{e^{-2\left(\frac{2}{3}\pi\right)^2 \cdot t}}_{\text{fra } a_2} \overbrace{\cos\left(\frac{2}{3}\pi x\right)}^{\text{likt i } a_2 \text{ og } u(x,0)} \underbrace{-2}_{\text{fra } u(0,x)} \cdot \overbrace{e^{-2\left(\frac{4}{3}\pi\right)^2 \cdot t}}^{\text{fra } a_4} \underbrace{\cos\left(\frac{4}{3}\pi x\right)}_{\text{likt i } a_4 \text{ og } u(x,0)}$$

Vi forenkler potensen til e-leddene og får svaret:

$$4e^{-\frac{8}{9}\pi^2 \cdot t} \cos\left(\frac{2}{3}\pi x\right) - 2e^{-\frac{32}{9}\pi^2 \cdot t} \cos\left(\frac{4}{3}\pi x\right)$$

Lineære transformasjoner

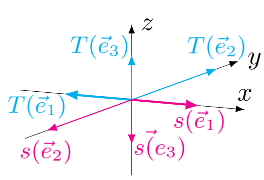
Basis

$$A = \left[T\vec{e_1} \vdots T\vec{e_2} \vdots \cdots \vdots T\vec{e_n}\right]$$

Transformasjon i rommet $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Her speiler man hver enkelt vektor hver for seg, så summerer vektorene sammen til en matrisen F.

$$T(\vec{e_1}) \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow S(\vec{e_1}) \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Transformerer vektoren $T(\vec{e_1})$. som speiles over origo

Konvertering fra 3 til 2 dimensjoner $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 100c \\ b-a \end{bmatrix}$$

Eksempel på formel.

Formelen brukes en gang for hver vektor så summeres til en matrise med navn G.

Sammensettnig ($R = T \cdot S$)

Finn standard matrise H

$$\begin{array}{ccccc} R & = & T & \cdot & S \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H & = & G & \cdot & F \end{array}$$

Diagonalisering

Egenverdier & Egenvektorer

$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$, der λ er egenverdien og $\vec{x}$ er egenvektoren.
Egenverdiene, λ, finner man ved å løse det karakteristiske polynomet som man får man tar determinanten av matrisen $A - \lambda I$.
Egenvektorene, $[\vec{V_1}, \vec{V_2} \cdots \vec{V_n}]$, finner man når man løser matrisen $A - I\lambda$ når man setter inn egenverdien, λ, til vektoren man ønsker å finne.

Diagonaliseringen til A:

En matrise kan diagonaliseres om matrisen er kvadratisk og den har lineært uavhengige vektorer. *Vektorene er linjært uavhengige så lenge matrisen ikke har frie variabler.*

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1} \qquad A^k = P \cdot D^k \cdot P^{-1}$$

$$e^A = P \cdot e^D \cdot P^{-1} \qquad P = [\vec{V_1}, \vec{V_2}, \cdots, \vec{V_k}]$$

A: Matrisen som skal skrives om.
D: Matrise med egenverdiene i diagonalen.
P: Egenvektorene som matrise.

1. Finn egenverdiene
2. Finn egenvektorene
3. Sett opp matrisene P, D og P^{-1}, og pass på at egenverdiene og egenvektorene stemmer med hverandre.

$$P = \begin{bmatrix} \vec{V_1} & \vec{V_2} & \cdots & \vec{V_n} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} \Updownarrow & \Updownarrow & \cdots & \Updownarrow \end{array}$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Viktig å huske

$$\sin(n\pi) = 0 \qquad \cos(n\pi) = (-1)^n \qquad -(-1)^n = (-1)^{n+1}$$

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 \qquad \cos^2(\alpha) = \tfrac{1}{2}(\cos(2\alpha) + 1)$$

Referanser
Haugan, J, *Formler og Tabeller* (2011), NKI Forlaget.
Kohler, W & Johnson, L , *Elementary differential equations* (2006), Pearson.
Nyberg, S, O, *Forelensningsnotater matte 2* (2012), UiA.

Om formelarket
Laget for å være til hjelp på matte 2 eksamen som det ene arket som er lov til å ha med utenom godkjente formelsamlinger. Det tas forbehold om eventuelle feil eller mangler.