Reg tek final exam formelsamling

Andreas Klausen

6. september 2012

Brukes som vanlig på eget ansvar :)

Innhold

1 Bode plot stuff

1.1 Kryssfrekvens

Kryssfrekvens, ω_c, er frekvensen der amplituden krysser 0 dB.

1.2 Fasemargin

Ved kryssfrekvensen kan man lese av ϕ_m ved å ta fasen man finner, A, og:

$$\phi_m = A - (-180°) \tag{1}$$

1.3 Gain Margin

Gain margin, G_m, finner man ved å se på amplituden ved frekvensen -180°, B, og da er:

$$G_m = -B \tag{2}$$

1.4 Forskjell på type system

1.4.1 Type 0

$$\frac{(s + \ldots)(\ldots)}{s^0(s + \ldots)(\ldots)} \tag{3}$$

- Regn ut startamplituden ved $\omega = 0$
- Start fasen ved 0°

1.4.2 Type 1

$$\frac{(s + \ldots)(\ldots)}{s^1(s + \ldots)(\ldots)} \tag{4}$$

- Regn ut startamplituden ved en frekvens mindre enn laveste break-frekvens (Eller veldig ofte 0.1rad/s), og start den med $-20dB/dec$
- Start fasen ved $-90°$

1.4.3 Type 2

$$\frac{(s + \ldots)(\ldots)}{s^2(s + \ldots)(\ldots)} \tag{5}$$

- Regn ut startamplituden ved en frekvens mindre enn laveste break frekvens (Eller veldig ofte 0.1rad/s), og start den med $-40dB/dec$
- Start fasen ved $-180°$

1.5 Break frekvens

Break ω	a $s+a$	a $\frac{1}{s+a}$	ω_n $K(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\zeta\frac{s}{\omega_n} + 1)$	ω_n $\frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2}+2\zeta\frac{s}{\omega_n}+1}$
Magnitude	+20dB/dec	-20dB/dec	+40dB/dec	-40dB/dec
Phase	$+90°$	$-90°$	$+180°$	$-180°$

1.6 Asymptotisk bode plot av Lag/Lead compensator

Får man spørsmål om å lage denne ved 0dB startamplitude, vil si at $K_{e_{ss}}$ ikke skal være med.

1.7 Eksempel på å lage bode plot

$$G(s) = \frac{K(s+3)}{s(s+1)(s+2} \tag{6}$$

- Type 1 system
- Laveste break frekvens ved $\omega_n = 1$, høyeste ved $\omega_n = 3$, derfor bode plot fra 0.1rad/s til 100 rad/s
- Start rate er -20dB/dec og $-90°$

Startamplituden finnes ved å ta $|G(s)|$ ved startfrekvensen $\omega_n = 0.1$

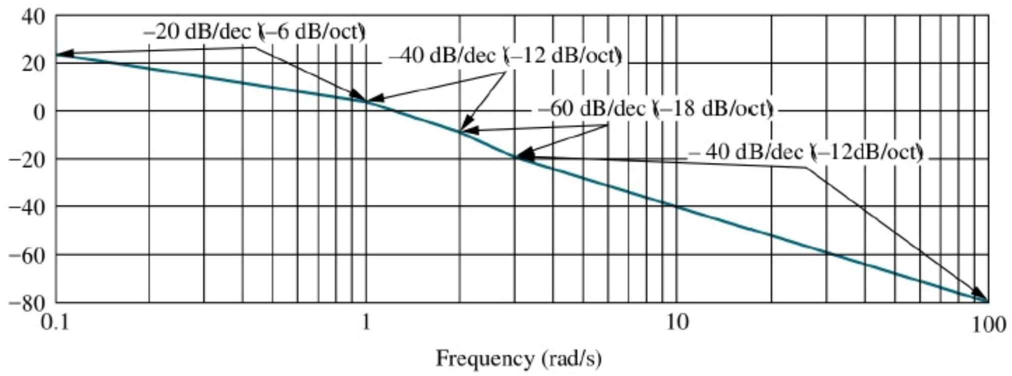
$$\begin{aligned} G(j0.1) &= \frac{K(0.1j+3)}{0.1j(0.1j+1)(0.1j+2)} \\ &= K(-1.7308 - 14.8144j) \\ |G(j0.1)| &= K\sqrt{(-17308)^2 + (-14.8144)^2} \\ &= 14.915K \approx 15K \end{aligned}$$

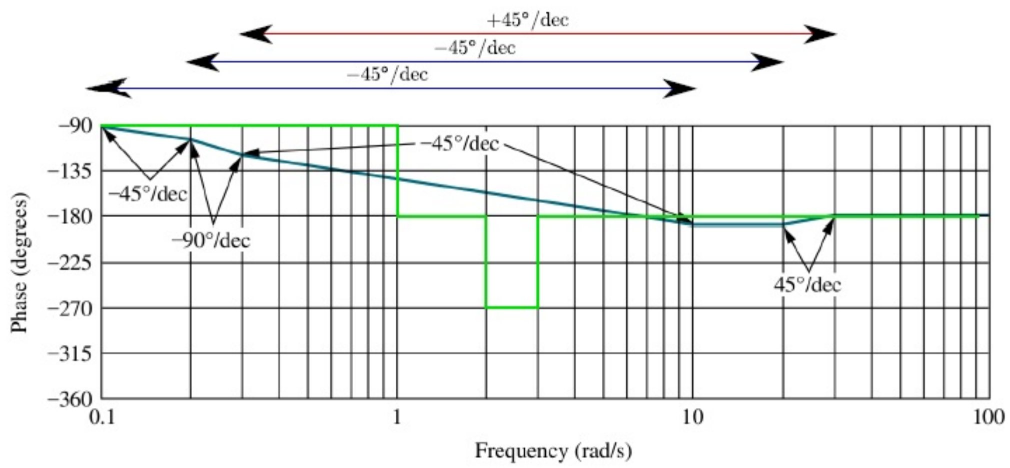
Setter så $K = 1$ og får:

$$Startamp = 20log(15)dB = 23.52dB \tag{7}$$

Break ω	1	2	3
Magnitude	-20dB/dec	-20dB/dec	+20dB/dec
Fase	$-90°$	$-90°$	$+90°$

Til slutt kan man da lage bode plotten:





2 Steady state error

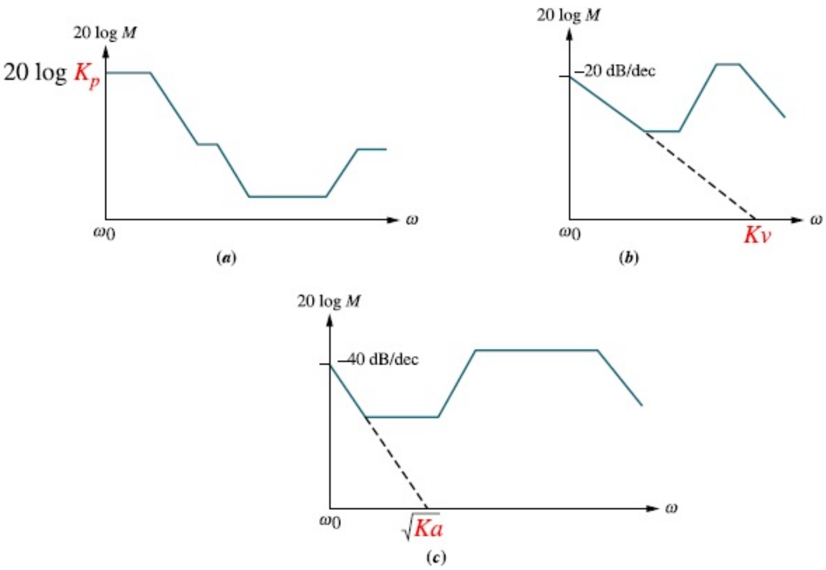
2.1 K_p K_v K_a

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s) \tag{8}$$

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s) \tag{9}$$

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s) \tag{10}$$

For å se dette ut ifra et bode plot trengs noen skarpe øyner: Her må man selvfølgelig vite hva slags type system man har.



2.2 Type 0

Input	SS error formula	Static error constant	Error
Step, u(t)	$\frac{1}{1+K_p}$	$K_p =$ C	$\frac{1}{1+K_p}$
Ramp, t*u(t)	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = 0$	∞
Parabola, $\frac{1}{2}t^2u(t)$	$\frac{1}{K_a}$	$K_a = 0$	∞

2.3 Type 1

Input	SS error formula	Static error constant	Error
Step, u(t)	$\frac{1}{1+K_p}$	$K_p = \infty$	0
Ramp, t*u(t)	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = C$	$\frac{1}{K_v}$
Parabola, $\frac{1}{2}t^2u(t)$	$\frac{1}{K_a}$	$K_a = 0$	∞

2.4 Type 2

Input	SS error formula	Static error constant	Error
Step, u(t)	$\frac{1}{1+K_p}$	$K_p = \infty$	0
Ramp, t*u(t)	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = \infty$	0
Parabola, $\frac{1}{2}t^2u(t)$	$\frac{1}{K_a}$	$K_a = C$	$\frac{1}{K_a}$

3 Lag compensator

3.1 Key Equation

$$G_{c_{Lag}} = K_{e_{ss}} K_{adj} \left(\frac{s + 0.1\omega_p}{s + 0.1K_{adj}\omega_p} \right) \tag{11}$$

$K_{e_{ss}}$ Gain adjustment in order to meet the required steady state error.

ω_p Frequency at which the phase margin would be the desired one plus 5° to 12° extra.

K_{adj} Gain adjustment in order to have 0dB at $\omega = \omega_p$

3.1.1 $K_{e_{ss}}$

$$\begin{aligned} K_p \vee K_v \vee K_a &= \lim_{s \to 0} s^{typesystem} K_{e_{ss}} G(s) \\ &= K_{e_{ss}} K_0 \end{aligned}$$

K_p finner man i error formlene (en maks error må være oppgitt i oppgaven) Der K_0 er start gainen der bode ploten starter. Finnes enten på bode plotten eller vha. utregningen til eksempel på å lage bode plot. Til slutt bruker man da de respektive error formlene.

3.1.2 ω_p

Etter $K_{e_{ss}}$ er funnet kan man lage ny bode plot av $K_{e_{ss}}G(s)$ som ofte blir gjort ved å endre på skalaen til original bode plot med $+20Log[K_{e_{ss}}]$. Så har man forhåpentligvis oppgitt en måte å regne ut ϕ_{Md} på (oppgitt %OS f.eks). Frekvensen kan finnes ved å se på fasen:

$$\phi_{Md} + [5° - 10°] - 180° \tag{12}$$

ω_P er da frekvensen ved denne fasen.

3.1.3 K_{adj}

Denne biten har til hensikt å senke amplituden til 0 der fasen er $\phi_{Md} + [5° - 10°] - 180°$, og det gjøres slik:

$$K_{adj} = 10^{\frac{-amp}{20}} \tag{13}$$

Der amp er amplituden i dB over 0. TIl slutt kan alt settes inn i Key Equation og man har sin lag compensator.

4 Lead compensator

4.1 Key equation

$$G_{Lead}(s) = \frac{1}{\beta}\left(\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}}\right) \tag{14}$$

4.2 Hvordan gå frem

Har man oppgitt en steady state error, begynner man med å finne $K_{e_{ss}}$ på samme måte som i Lag-kompensatoren. Etter det lager man en bode plot av $K_{e_{ss}}G(s)$ og finner ϕ_M. Sammen med ϕ_{Md}, som man finner ved hjelp av %OS ($\zeta \to \phi_{Md}$), finner man:

$$\phi_{max} = \phi_{Md} - \phi_M + 10^\circ \tag{15}$$

Så kan man finne β:

$$\beta = \left(\frac{1 - sin\phi_{max}}{1 + sin\phi_{max}}\right) \tag{16}$$

Så for å finne ω_{max}, bruker man følgende formel:

$$|G_c(j\omega_{max}| = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tag{17}$$

Så kommer den tricky biten. For å finne ω_{max} må man se i bode plot til $K_{e_{ss}}G(s)$ ved enten $+20Log[\frac{1}{\sqrt{\beta}}]dB$ eller ved $-20Log[\frac{1}{\sqrt{\beta}}]dB$, avhengig av hvilken frekvens som blir størst. Til slutt finner man da $\frac{1}{T}$:

$$\frac{1}{T} = \omega_{max}\sqrt{\beta} \tag{18}$$

Dette stappes inn slik:

$$G_c = K_{e_{ss}} \times G_{Lead} \tag{19}$$

Der G_c er Lead kompensatoren. Får man spørsmål om denne er grei, med tanke på ω_{BW} og ω_{BWd}, kan læreren suge seg selv, fordi å bode plotte $G_cG(s)$ er ikke noe gøy.

4.3 Uten oppgitt %OS

Hvis man får oppgitt en ss-error og en ω_c, kan man hoppe over noen steg og gjøre dette. Finn først $K_{e_{ss}}$ på vanlig måte, men i bode plot til $K_{e_{ss}}G(s)$ må man finne amplituden ved den gitte ω_{max}. Denne amplituden skal motvirkes med $\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ slik at amplituden her blir 0.

$$\begin{aligned}
|G_c(j\omega_{max})| &= \frac{1}{\sqrt{\beta}} = -Amp_{\omega_c} = A \\
\to 20Log[\frac{1}{\sqrt{\beta}}] &= A \\
\to \beta &= \frac{1}{10^{\frac{A}{20}*2}}
\end{aligned}$$

Deretter er det bare å følge vanlig prosedyre.

5 Lead-Lag compensator

5.1 Key equation

$$G_{Lead-Lag}(s) = \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} \right) \left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\gamma T_2}} \right) \tag{20}$$

5.2 Hvordan gå frem

Begynn med å regn ut så mye som mulig fra de oppgitte spesifikasjonene. Dvs: $\zeta, \phi_{Md}, \omega_{BWd}, K_p \vee K_v \vee K_a$ Finn deretter $K_{e_{ss}}$ på samme måte som før. ω_c regnes ut slik:

$$\omega_c = 0.8\omega_{BWd} \tag{21}$$

Sammen med denne frekvensen finner man ϕ_{ω_c} (finnes i bode plot til enten G(s) eller $K_{e_{ss}}G(s)$), og ϕ_{max}:

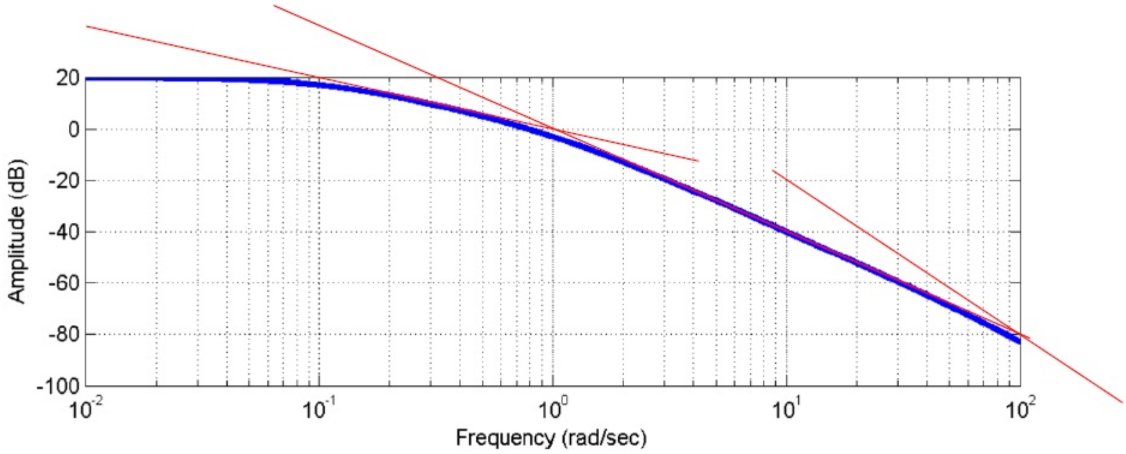
$$\phi_{max} = \phi_{Md} - \phi_{\omega_c} + [5^\circ - 10^\circ] \tag{22}$$

Deretter kan β og γ bli funnet, samt det siste som kreves i en Lead-Lag kompensator:

$$\beta = \left(\frac{1 - sin\phi_{max}}{1 + sin\phi_{max}} \right)$$
$$\gamma = \frac{1}{\beta}$$
$$\frac{1}{T_2} = \frac{\omega_c}{10}$$
$$\frac{1}{T_1} = \omega_c\sqrt{\beta}$$

Dette settes inn i Key Equation, og du er good to go!

6 Estimere transfer funksjon fra bode plot



Her går man ut ifra at læreren gir bruddpunkter ved frekvenser som 0.1, 1, 10, 100 eller 1000 etc. For ellers blir det vanskelig å estimere. Det man vanligvis gjør er å først vite hva slags type system man har, så bare tegne på streker der grafen er mest rett fram. Der streken avviker fra graf, kan man gå utifra at det er et bruddpunkt i nærmeste 10-gangen. Går grafen da nedover med -20dB/dec er det en pol. Hvis den øker er det et nullpunkt etc. Den estimerte transferfunksjonen for denne grafen blir:

$$G(s) = \frac{K}{(s+0.1)(s+1)(s+100)} \tag{23}$$

Der K finnes ved å ta:

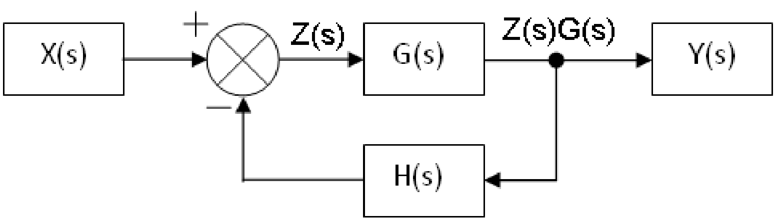
$$\begin{aligned}\lim_{\omega\to 0}(20Log[|G(j\omega|) = 20Log\left(\frac{K}{0.1\times 1\times 100}\right) = 20dB \\ K = 10^{\frac{20}{20}}\times 0.l\times 1\times 100 \\ = 100\end{aligned}$$

7 Transfer function stuff

7.1 Ultimate gain, total forsterking

Ultimate gain finner man ved å ta $\lim_{\omega\to 0} G(j\omega)$ (evt $\lim_{\omega\to 0.1}$ om det er type 1 eller 2). Eller ved å se på bode ploten og finne gainen som skal til å starte der man gjør.

7.2 Closed loop transfer function



Hvis M(s) er transferfunksjonen:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = M(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \tag{24}$$

8 Del-eksamen stuff

8.1 1. grads

Her har man en 1 grads Transfer funksjon som må på formen:

$$G(s) = \frac{a}{s+a} \tag{25}$$

Noen ganger kommer den på formen:

$$G(s) = \frac{K}{s+a} \tag{26}$$

Så kan man finne T_s og T_r :

$$Ts = \frac{4}{a} \tag{27}$$

$$Tr = \frac{2.2}{a} \tag{28}$$

Time constant, τ, finnes slik:

$$\tau = \frac{1}{a} \tag{29}$$

8.2 2. Grads

$$G = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1} \tag{30}$$

Eller:

$$G = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2} \tag{31}$$

Så kan man finne T_p, T_s, %OS, og ζ.

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{32}$$

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \tag{33}$$

$$\%OS = e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})} \times 100 \tag{34}$$

$$\zeta = \frac{-\ln(\%OS/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%OS/100)}} \tag{35}$$

For en tilnærming til T_r kan man bruke:

$$T_r = (Normalizedrisetime)/\omega \tag{36}$$

9 Flytskjemaer/formler

Lead-Lag Compensator Structure Graph

Second order approximation:

$$\zeta = \frac{-\ln(\%OS/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%OS/100)}} \qquad (1)$$

$$\phi_M = \tan^{-1} \frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1 + 4\zeta^4}}} \qquad (2)$$

$$\omega_{BW} = \frac{4}{T_s \zeta} \sqrt{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}} \qquad (3)$$

$$\omega_{BW} = \frac{\pi}{T_p \sqrt{1 - \zeta^2}} \sqrt{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}} \qquad (4)$$

$$\omega_{BW} = \omega_{OL|G_{dB} \in [-6dB, -7.5dB]}$$

$$\text{if } \phi_{OL} \in [-135^\circ, -225^\circ] \qquad (5)$$

Lag compensation: Upper break one decade below ω_c:

$$\frac{1}{T_2} = 0.1\omega_c \qquad (6)$$

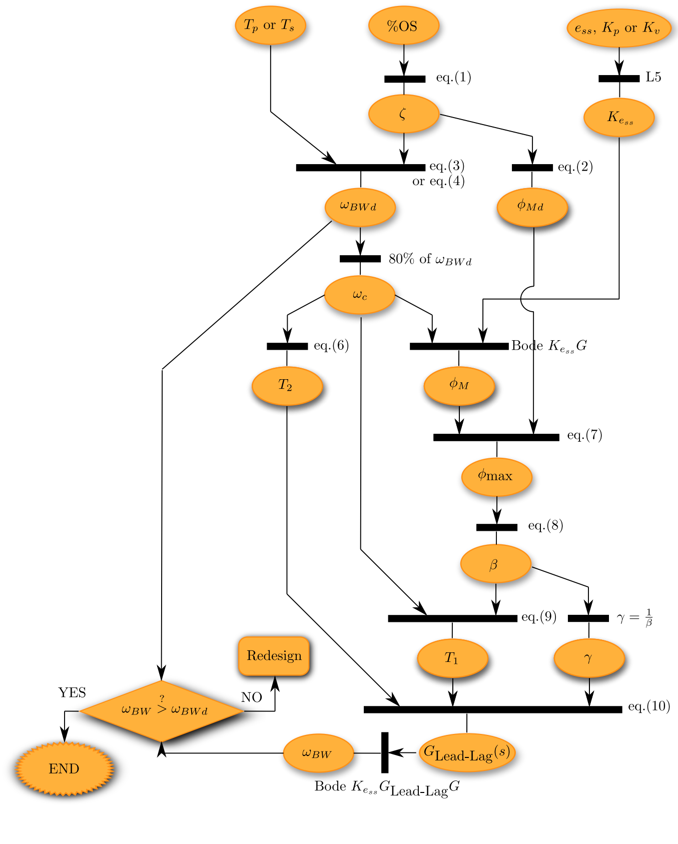
Lead compensation:

$$\phi_{\text{max}} = \phi_{Md} - \phi_{M\omega_c} + [5^\circ - 10^\circ] \qquad (7)$$

$$\beta = \left(\frac{1 - \sin\phi_{\text{max}}}{1 + \sin\phi_{\text{max}}}\right) \qquad (8) \qquad\qquad \omega_{\text{max}} = \frac{1}{T_1\sqrt{\beta}} \qquad (9)$$

Lead-Lag compensation:

$$G_{\text{Lead-Lag}}(s) = \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}}\right)\left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\gamma T_2}}\right) \qquad \gamma > 1 \qquad (10)$$



Lead Compensator Structure Graph

Second order approximation:

$$\zeta = \frac{-\ln(\%OS/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%OS/100)}} \tag{1}$$

$$\phi_M = \tan^{-1} \frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1+4\zeta^4}}} \tag{2}$$

$$\omega_{BW} = \frac{4}{T_s \zeta} \sqrt{(1-2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}} \tag{3}$$

$$\omega_{BW} = \frac{\pi}{T_p \sqrt{1-\zeta^2}} \sqrt{(1-2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}} \tag{4}$$

$$\omega_{BW} = \omega_{OL|G_{dB} \in [-6dB, -7.5dB]}$$
$$\text{if } \phi_{OL} \in [-135^\circ, -225^\circ] \tag{5}$$

Lead compensation:

$$G_{\text{Lead}}(s) = \frac{1}{\beta} \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \qquad \beta < 1 \tag{6}$$

$$|G_c(j\omega_{\text{max}})| = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tag{7}$$

$$\beta = \left(\frac{1 - \sin \phi_{\text{max}}}{1 + \sin \phi_{\text{max}}} \right) \tag{8}$$

$$\omega_{\text{max}} = \frac{1}{T\sqrt{\beta}} \tag{9}$$

$$\phi_{\text{max}} = \phi_{Md} - \phi_M + 10^\circ \tag{10}$$