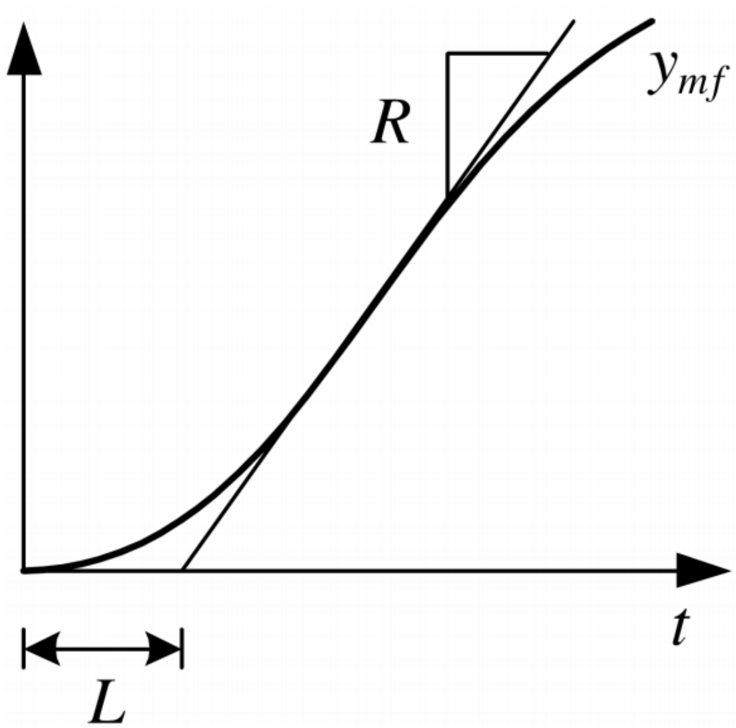
Formelsamling i Regtek

Andreas Klausen
(Kontrollør Sondre S. Tørdal)

4. september 2012

Bruk på eget ansvar.

Innhold



Figur 1: Et bilde av en typisk O.L. graf

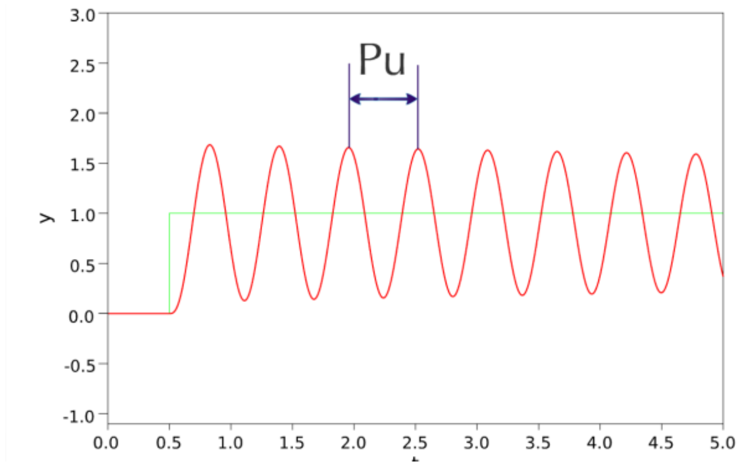
1 Ziegler Nochlies PID tuning

Her tar jeg for meg formler og metoder for å finne PID regulatoren med formler, både Open loop og Closed loop.

1.1 Open Loop

Her får du oppgitt en graf (Figur 1) som starter i null og går opp til en final value. Der U er final value til stepen. (Vanligvis 1)
Utregning av PID kontroller står i tabellen:

PID type	K_p	$T_i = K_p/K_i$	$T_d = K_d/K_p$
P	$\frac{1}{LR/U}$	∞	0
PI	$\frac{0.9}{LR/U}$	3.3L	0
PID	$\frac{1.2}{LR/U}$	2L	0.5L



Figur 2: Et bilde av en typisk C.L. graf

1.2 Closed loop

Her får du oppgitt en graf (Figur 2) som er stabil oscilerende og en gitt konstant for Ku = Kp. Pu er perioden mellom to topper.
Denne type oppgave kan regnes ut ifra tabell:

PID type	K_p	$T_i = K_p/K_i$	$T_d = K_d/K_p$
P	0.5Ku	∞	0
PI	0.45Ku	$\frac{Pu}{1.2}$	0
PID	0.6Ku	$\frac{Pu}{2}$	$\frac{Pu}{8}$

2 Rise time og setteling time(T_r og T_s)

2.1 1. Grads

Her har man en 1 grads Transfer funksjon som må på formen:

$$G(s) = \frac{a}{s+a} \tag{1}$$

Noen ganger kommer den på formen:

$$G(s) = \frac{K}{s+a} \tag{2}$$

Så kan man finne T_s og T_r :

$$Ts = \frac{4}{a} \tag{3}$$

$$Tr = \frac{2.2}{a} \tag{4}$$

Time constant, τ, finnes slik:

$$\tau = \frac{1}{a} \tag{5}$$

Så lenge a blir funnet fra formen sett i ligning (1) eller (2)

2.2 2. Grads

2. grads transferfunksjoner bør på formen (Se figur 3) for eksempel på 2. grads graf)

$$G = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1} \tag{6}$$

Eller:

$$G = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2} \tag{7}$$

Så kan man finne T_p, T_s, %OS, og ζ.

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{8}$$

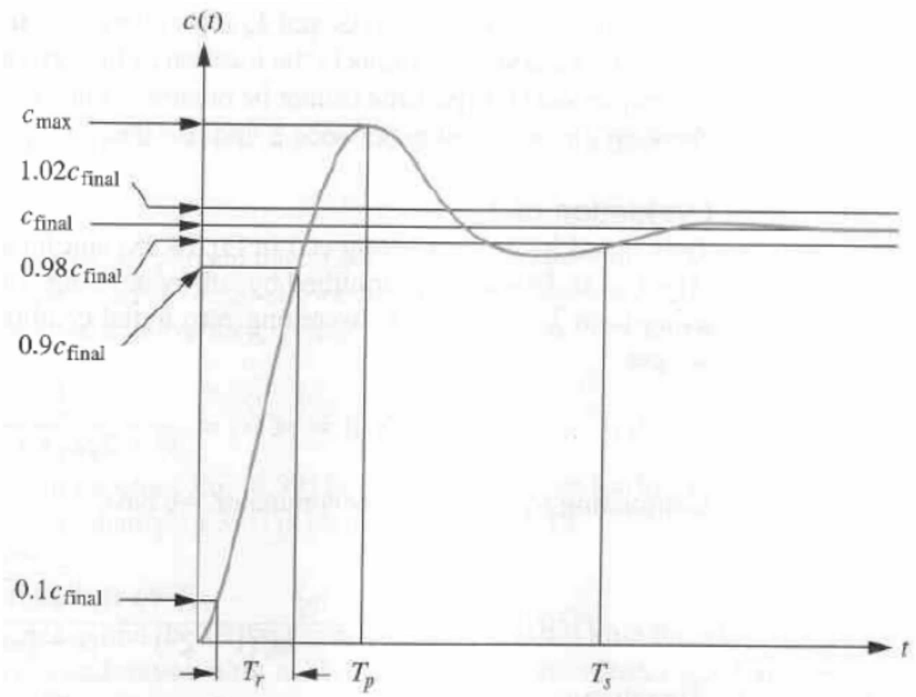
$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \tag{9}$$

$$\%OS = e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})} \times 100 \tag{10}$$

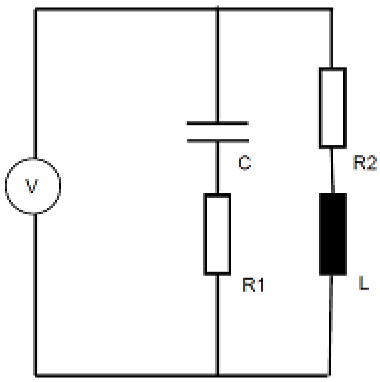
$$\zeta = \frac{-\ln(\%OS/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%OS/100)}} \tag{11}$$

For en tilnærming til T_r kan man bruke:

$$T_r = (Normalizedrisetime)/\omega \tag{12}$$



Figur 3: Typisk 2. grads graf.



Figur 4: Eksempel på krets

σ

3 Laplace

Laplace av forskjellige formler er her:

3.1 Kretsteknikk

Kondensatorer, spoler og resistanser blir etter Laplace:

	C	L	R
S-verdenen	$\frac{1}{Cs}$	Ls	R

Eksempel på en krets ses på figur: 4

3.2 Masse, fjær og demper og tanker

	x'''	x''	x'	x
S-verdenen	s^3X	s^2X	sX	X

Tanker regnes ut ved å ta (som et eksempel se figur 6):

$$A_1 x_1' = u(t) - k_1 x_1 \tag{13}$$

$$A_2 x_2' = k_1 x_1 - k_2 x_2 \tag{14}$$

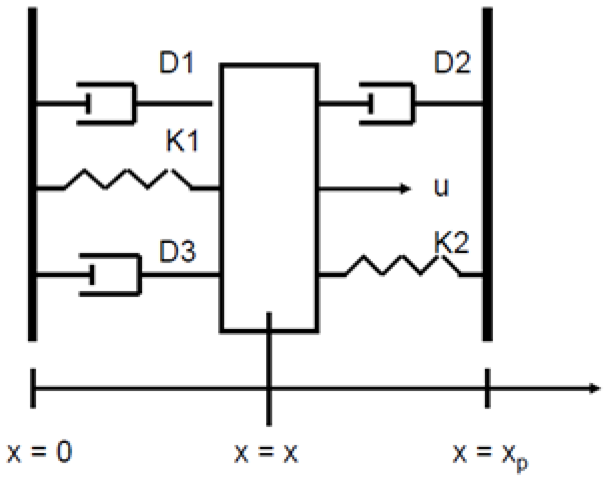
Masse, fjær og dempesystem regnes ut med newtons 2. lov. (Se figur 5)

3.3 blokkdiagram

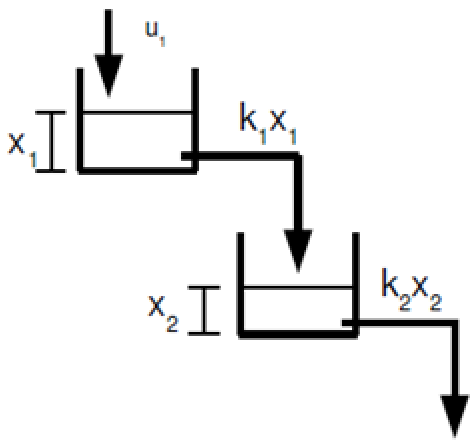
Her gjelder det bare å se på summetegnene, lage en ligning for hvert summetegn, med det som kommer ut = det som kommer inn. Samme Laplace regler gjelder her som i 3.2. I tillegg får du:

$$\int y(t) = \frac{1}{s} Y(s) \tag{15}$$

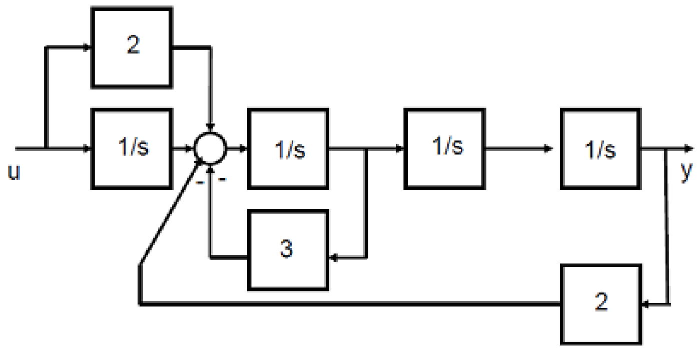
Et eksempel på et blokkdiagram kan ses på figur 7.



Figur 5: Eksempel på masse, fjær og demper oppgave



Figur 6: Eksempel på vanntankoppgave



Figur 7: Eks på blokkdiagram

3.4 Laplace tabell

Hele tronddal sitt Laplace tabell står på figur 8):

3.5 Transfer-funksjon

En transfer-funksjon er definert som utsignal dividert på innsignal. Hvis Y(s) er utsignalet og U(s) er innsignalet blir transferfunksjonen:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \tag{16}$$

Laplacetransformasjon

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$
$f(t)$	$F(s)$
$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
f'	$sF(s) - f(0)$
f''	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{n-1}(0)$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$\int_0^t f(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s}F(s)$
$tf(t)$	$-F'(s)$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(\sigma)\,d\sigma$

Parallellforskyving:

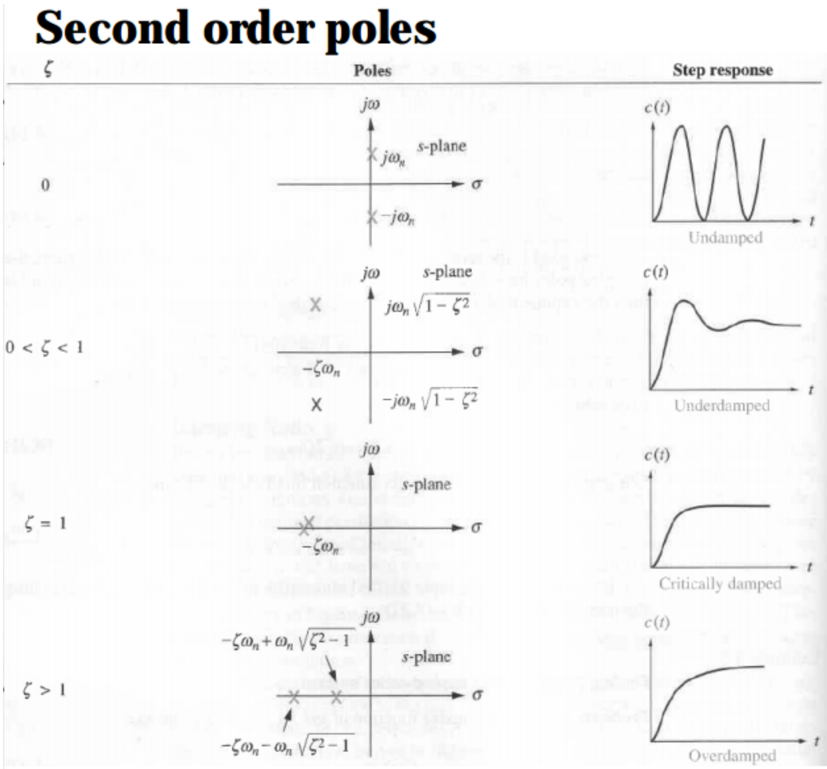
$f(t)$	$F(s)$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$

$f(t)$	$F(s)$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}F(s)$

$f(t) \longrightarrow$	$F(s)$		$F(s) \longrightarrow$	$f(t)$
1	$\frac{1}{s}$	1	$\frac{1}{s}$	1
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	2	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$2\sqrt{t/\pi}$	$\frac{1}{s^{3/2}}$	3	$\frac{1}{s^{3/2}}$	$2\sqrt{t/\pi}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	4	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}$
t^ne^{at}	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	5	$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!}(t^{n-1}e^{at})$
$e^{at} - e^{bt}$	$\frac{a-b}{(s-a)(s-b)}$	6	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})$
$ae^{at} - be^{bt}$	$\frac{(a-b)s}{(s-a)(s-b)}$	7	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{1}{a-b}(ae^{at} - be^{bt})$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	8	$\frac{1}{s^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}\sin\omega t$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	9	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$
$e^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$	10	$\frac{1}{(s-a)^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}e^{at}\sin\omega t$
$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	11	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	$e^{at}\cos\omega t$
$\omega t - \sin\omega t$	$\frac{\omega^3}{s^2(s^2+\omega^2)}$	12	$\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^3}(\omega t - \sin\omega t)$
$1 - \cos\omega t$	$\frac{\omega^2}{s(s^2+\omega^2)}$	13	$\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^2}(1 - \cos\omega t)$
$\sin\omega t - \omega t\cos\omega t$	$\frac{2\omega^3}{(s^2+\omega^2)^2}$	14	$\frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t)$
$t\sin\omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$	15	$\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\frac{t}{2\omega}\sin\omega t$
$\sin\omega t + \omega t\cos\omega t$	$\frac{2\omega s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	16	$\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega}(\sin\omega t + \omega t\cos\omega t)$
$\cos at - \cos bt$	$\frac{(b^2-a^2)s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$	17	$\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$	$\frac{1}{b^2-a^2}(\cos at - \cos bt)$
$\binom{\sin kt\cosh kt-}{\cos kt\sinh kt}$	$\frac{4k^3}{s^4+4k^4}$	18	$\frac{1}{s^4+4k^4}$	$\frac{1}{4k^3}\binom{\sin kt\cosh kt-}{\cos kt\sinh kt}$
$\sin kt\sinh kt$	$\frac{2k^2s}{s^4+4k^4}$	19	$\frac{s}{s^4+4k^4}$	$\frac{1}{2k^2}\sin kt\sinh kt$
$\sinh kt - \sin kt$	$\frac{2k^3}{s^4+k^4}$	20	$\frac{1}{s^4+k^4}$	$\frac{1}{2k^3}(\sinh kt - \sin kt)$
$\cosh kt - \cos kt$	$\frac{2k^2s}{s^4+k^4}$	21	$\frac{s}{s^4+k^4}$	$\frac{1}{2k^2}(\cosh kt - \cos kt)$
$u(t-a)$	$\frac{1}{s}e^{-as}$	22	$\frac{1}{s}e^{-as}$	$u(t-a)$
$\delta(t-a)$	e^{-as}	23	e^{-as}	$\delta(t-a)$

7

Figur 8: Laplace-tabell



Figur 9: Andre grads poler

4 Second order poles and damping ratio

Her er et bilde på hvordan forskjellige ζ vil se ut på grafen: (Figur 9) Dette er spesielt greit å ha når man skal finne en transferfunksjon utifra en graf som vist på figur 3

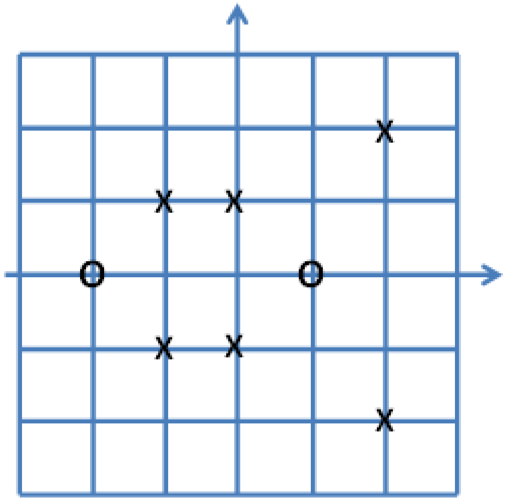
4.1 Finne transferfunksjon til en 2 ordens graf

Har man en 2 ordens graf er den letteste framgangsmetoden å først finne final value theorem til de oppgitte svaralternativene (transferfunksjonene) og sjekke de opp mot grafen. (Se kapittel 6)

Deretter finn ζ (Formel 6 eller 7) for de aktuelle transferfunksjonene og sjekk de opp mot figur 9.

Er du forsatt usikker kan man regne ut %OS for de aktuelle ζ'ene (Se formel 10) og sjekke de opp mot den oppgitte graf i oppgaven. Da bør man ha funnet svaret. Husk at en OverShoot fra final value 10 til 14 er:

$$\%OS = \frac{\triangle H\emptyset yde}{FinalValue} = \frac{14-10}{10} = 0.4 = 40\% \tag{17}$$



Figur 10: Eksempel på poler og nullpunkter. Verdiene øker med 1 per enhet

5 Nullpunkter og poler

Nullpunkter og poler kan ses ifra en graf med henholdsvis O'er og X'er.
Se figur 10

Poler på høyre side av imaginær-aksen er alltid ustabile. Hvis oppgaven sier at man skal unngå ustabile poler må disse ignoreres.

Transferfunskjonen for figur 10 blir da en forsterkning, K, ganget med nullpunkter og delt på poler:

$$G(s) = \frac{K(s+2)(s-1)}{(s+i)(s-i)(s+1+i)(s+1-i)} \tag{18}$$

6 Final value theorem

Final value theorem sier at:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} Y(s) * s = \lim_{s\to 0} G(s) * U(s) * s \tag{19}$$

Det vil si at hvis du har en transfer-funksjon, så kan du ta final value av den ganget med stepen og få ut hvilken y(t)-verdi grafen ender på når den er stabil.
Hvis step går fra $0 \to 2$ blir:

$$U(s) = \frac{2}{s} \tag{20}$$

7 Delbrøksopspalting. Mellom y(t) og Y(s).

Har man en transferfunksjon og vil finne responsen i tidsplanet, y(t), må man bruke invers Laplace. Til dette må man kunne delbrøksoppspalting, et eksempel på dette:

$$G(s) = \frac{5(s+2)}{(s+3)(s+4)(s+5)} \tag{21}$$

Av denne får man, hvis U er en step fra 0 $\rightarrow$ 1

$$Y(s) = G(s) * U(s) = \frac{5(s+2)}{(s+3)(s+4)(s+5)} \frac{1}{s} \tag{22}$$

Delbrøksoppspalter man denne får man:

$$\frac{5(s+2)}{(s+3)(s+4)(s+5)} \frac{1}{s} = \frac{A}{(s+3)} + \frac{B}{(s+4)} + \frac{C}{(s+5)} + \frac{D}{s} \tag{23}$$

For å løse denne er den letteste metoden å gange hele ligningen med parantesen som står under A, (s+3), for så å sette s$\rightarrow -3$. Dette gir etter endt multiplisering og får innsetting av s:

$$\frac{5(s+2)}{(s+4)(s+5)} \frac{1}{s} = A + \frac{B(s+3)}{(s+4)} + \frac{C(s+3)}{(s+5)} + \frac{D(s+3)}{s} \tag{24}$$

Setter man da inn s$\rightarrow -3$ forsvinner B, C og D. Står da igjen med:

$$A = \frac{5(-3+2)}{(-3+4)(-3+5)} \frac{1}{-3} = \frac{-5}{-6} = 0.8333 \tag{25}$$

Gjør man akkurat det samme med B, C og D får man løst ut alt. Deretter gjenstår bare invers Laplace der:

t-verden	s-verden
1*u(t)	$\frac{1}{s}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$

8 Credits

Takk til Jostein Trondal for bruk av Laplace-tabell og generell LaTeX- opplæring på nett.