

Reguleringsteknikk Sammendrag

REVISJON 1.1.1

ØRJAN LANGØY OLSEN

Innhold

Ordliste	2
PID (Proporsjonal Integral Derivasjon) regulator	3
Ziegler-Nichols Closed-loop tuning	3
Ziegler-Nichols Open-loop tuning	4
Modellering	4
Vanntank	5
Mekanisk system	5
Mekaniske systemer med rotasjon	6
Elektrisk krets med sløyfestrøm	6
Elektrisk krets med knutepunkt	7
Laplace transformasjon	7
Transfer funksjon.....	8
Transfer funksjon fra modell	9
Blokkdiagram reduksjon.....	10
Sentrale formler	11
Førstegrads system.....	11
Andregrads system	11
Poles og zeros.....	13
Step response	14
Steady-State Error	15
Asymptotisk bode plot	16
Startverdier.....	18
Magnitude	18
Break frekvens.....	18
Nyquist stabilitets kriterium	18
Design av proportional controller	20
Lag/Lead kompensator.....	20
Lag kompensator	20
Lead kompensator.....	21
Matlab	23
Referanser	24

Ordliste

Engelsk	Norsk	Beskrivelse
Process variable	Prosess variabel	Variabelen som blir regulert. (eks. temperatur)
Process value	Prosess verdi	Den nåværende verdien til prosess variabelen.
Set point	Settpunkt	Ønsket verdi for prosess variabelen.
Actuator	Aktuator	En innretning som gjør om en form for energi til en annen. (eks. ventil, sylinder)
Plant/System	System	Matematisk modell som representerer det fysiske systemet.
Saturation	Metning	Fysisk realiserbare systemer vil alltid ha en grense på hvor mye pådrag du kan gi. Saturation er en "hard limit" for pådraget.
Wind-up		Wind-up er et problem som kan skje på grunn av integral delen i PID regulatorer. På grunn av metning kan integral leddet hope seg opp og det vil bli stor overshoot.
Dead time	Dødtid	Dødtid er forsinkelsen fra set point er endret til prosess variabelen forandres.
Bandwidth	Båndbredde	Båndbredde frekvensen er definert som den frekvensen closed-loop magnituden er -3 dB. Båndbredden er bæremengden av frekvenser til systemet som kan holde på nyttig informasjon.
Crossover frequency	Kryssfrekvens	Kryssfrekvensen er der amplituden krysser 0 dB i ett bode plot.
Natural response/Transient response	Naturlig respons	Er systemets respons til startverdibetingelsene.
Natural frequency	Egenfrekvens	Den frekvensen der det vil oppstå resonans.
Forced response	Tvungen respons	Er systemets respons til de eksterne påvirkningene uten tanke på startverdibetingelsene.
Steady State	Stabil tilstand	Den tilstanden systemet er i når prosess verdien endrer seg lite og har gått mot en bestemt verdi.
Steady State Error		Forskjellen mellom setpoint og steady state verdien.
Rise time		Tiden det tar fra 10 % av final value til 90 %.
Settling time		Tiden det tar før responsen forblir innenfor $\pm 2\%$.
Peak time		Tiden det tar før den først peaken blir nådd.
Asymptote	Asymptote	Geometrisk forklart er en asymptote en tangentlinje til en kurve i punktet uendelig.
Gain	Forsterkning	
Gain margin	Forsterkningsmargin	Antall dB mellom 0 dB og den frekvens hvor fasen er -180° .
Stability margins	Stabilitetsmarginer	Gain og phase margin.
Phase margin	Fasemargin	Antall grader mellom -180° og fasen ved kryssfrekvensen.
Resonance	Resonans	Resonans er det at et system oscillerer med større amplitude ved gitte frekvenser.
Decade	Dekade	En dekad er en faktor på 10 differanse mellom to tall.
Octave	Oktav	Dobling eller halvering av frekvens.
Unity feedback		Feedback med 1 i gain.

PID (Proporsjonal Integral Derivasjon) regulator

PID med K_i og K_d

$$u_2(t) = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt} + K_i \int e(t) dt$$

med T_i og T_d

$$u_2(t) = K_p \left(e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt \right)$$

T_i : Reset Time

$$T_i = \frac{K_p}{K_i} \Rightarrow K_i = \frac{K_p}{T_i}$$

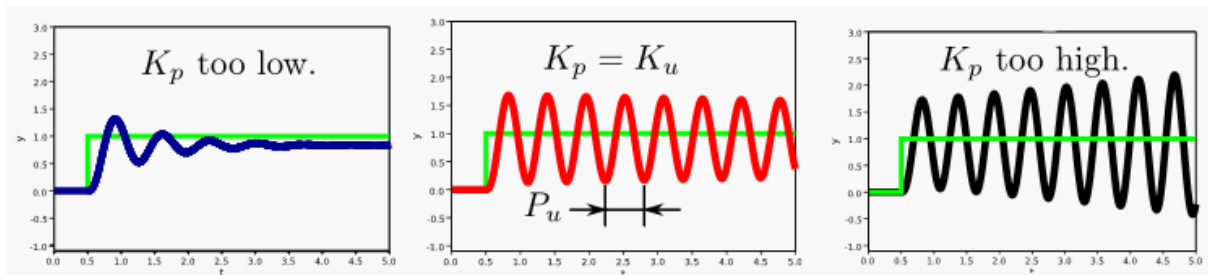
T_d : Derivative time

$$T_d = \frac{K_d}{K_p} \Rightarrow K_d = T_d \cdot K_p$$

Effekten av å øke parameterne

	Rise time	Overshoot	Settling Time	Steady state error
K_p	Minsker	Øker	Små endringer	Minsker
K_i	Minsker	Øker	Øker	Elimineres
K_d	Små minskninger	Minskes	Minskes	Ingen endring

Ziegler-Nichols Closed-loop tuning

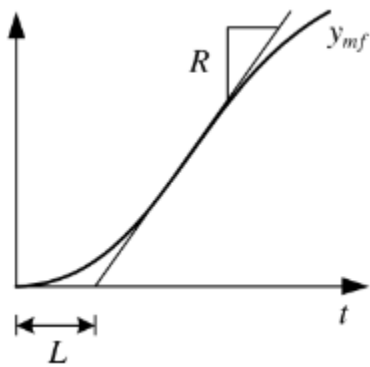


K_u : Ultimate gain

P_u : Ultimate period

Type	K_p	T_i	T_d	K_i	K_d
P	$0,5K_u$	∞	0	0	0
PI	$0,45K_u$	$\frac{P_u}{1,2}$	0	$\frac{1,2K_p}{P_u} = \frac{0,54K_u}{P_u}$	0
PID	$0,6K_u$	$\frac{P_u}{2}$	$\frac{P_u}{8}$	$\frac{2K_p}{P_u} = \frac{1,2K_u}{P_u}$	$\frac{8K_p}{P_u} = \frac{4,8K_u}{P_u}$

Ziegler-Nichols Open-loop tuning



U: Input

L: Dead time

R: Reaction rate

$$R = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Type	K_p	T_i	T_d	K_i	K_d
P	$\frac{U}{LR}$	∞	0	0	0
PI	$\frac{0,9U}{LR}$	$3,3L$	0	$\frac{0,27U}{L^2R}$	0
PID	$\frac{1,2U}{LR}$	$2L$	$0,5L$	$\frac{0,6U}{L^2R}$	$\frac{0,6U}{R}$

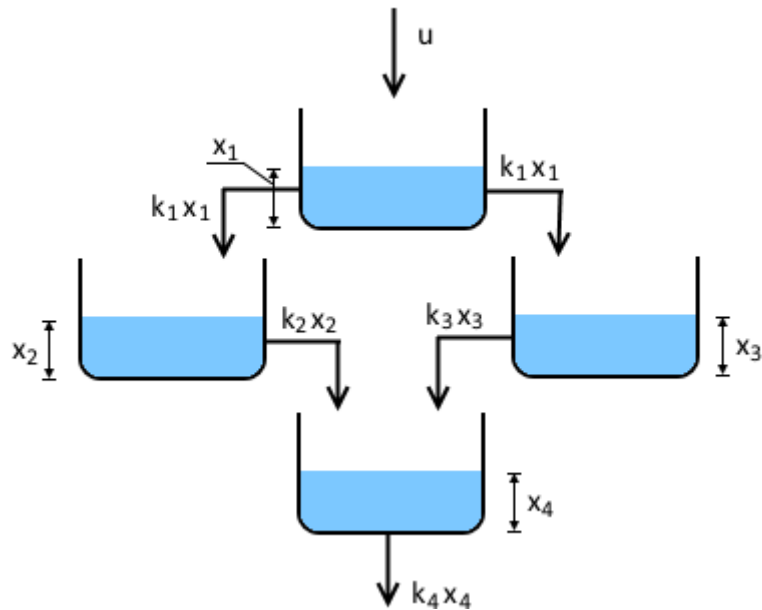
Modellering

Endring av mengde pr. tid i systemet er lik netto mengdeinnstrømning

$$\frac{d(\text{mengde})}{dt} = \sum \text{innstrømninger} - \sum \text{utstrømninger} + \sum \text{generert}$$

Vanntank

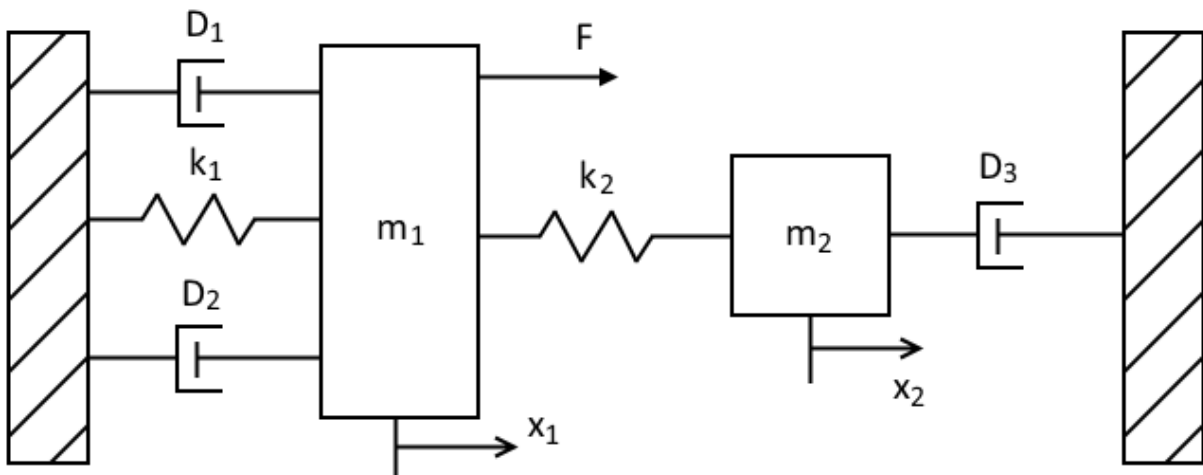
En likning per vanntank.



$$\begin{aligned}
 A_1 \dot{x}_1 &= u - 2k_1 x_1 \\
 A_2 \dot{x}_2 &= k_1 x_1 - k_2 x_2 \\
 A_3 \dot{x}_3 &= k_1 x_1 - k_3 x_3 \\
 A_4 \dot{x}_4 &= k_2 x_2 + k_3 x_3 - k_4 x_4
 \end{aligned}$$

Mekanisk system

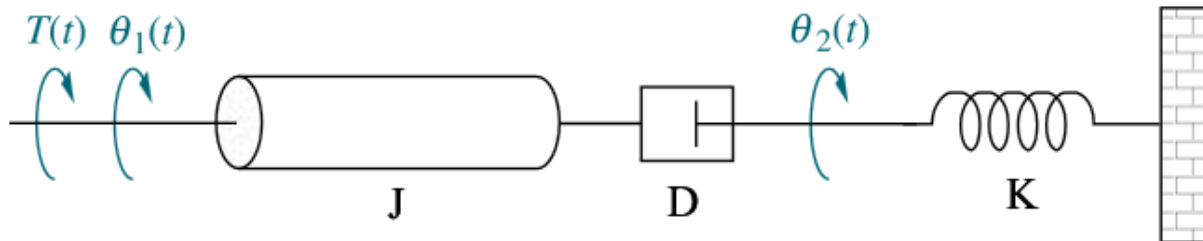
En likning per masse. Hvis det er to impedanser ved siden av hverandre må det defineres et masseløst objekt i mellom.



$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{x}_1 + D_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + D_2 \dot{x}_1 + k_2 (x_1 - x_2) &= F \\
 m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) + D_3 \dot{x}_2 &= 0
 \end{aligned}$$

Mekaniske systemer med rotasjon

En likning per masse. J er massetreghet. Hvis det er to impedanser ved siden av hverandre må det defineres et masseløst objekt i mellom.

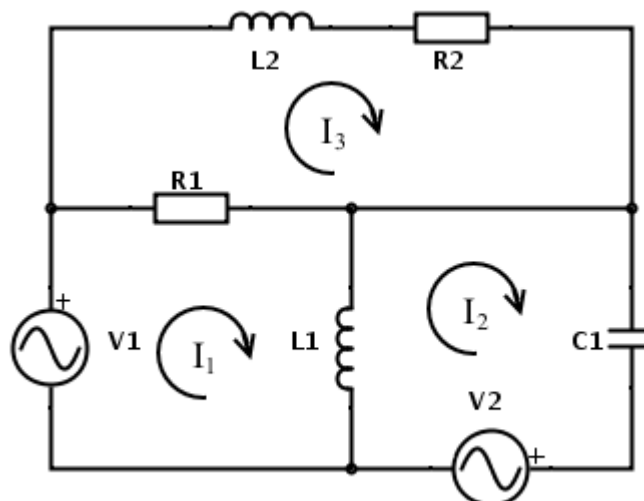


$$J\ddot{\theta}_1 + D_1(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) = T$$

$$D(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + K\theta_2 = 0$$

Elektrisk krets med sløyfestrøm

En likning per sløyfe.



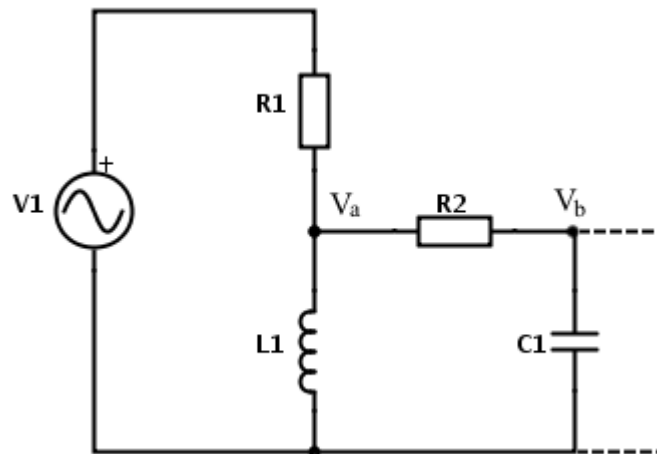
$$R_1 i_1 + L_1(i_1' - i_3') = v_1$$

$$L_1(i_2' - i_1') + \frac{1}{C_1} \int i_2 = -v_2$$

$$R_1(i_3 - i_1) + L_2 i_3' + R_2 i_3 = 0$$

Elektrisk krets med knutepunkt

En likning per knutepunkt. I eksemplet under er vi interessert i spenningen V_1 og spenningen over C_1 , så må definere et nytt knutepunkt V_b .



$$\begin{aligned} 1: \frac{V_1 - V_a}{R_1} &= \frac{V_a}{Z_L} + \frac{V_a - V_b}{R_2} \\ 2: \frac{V_a - V_b}{R_2} &= \frac{V_b}{Z_C} \\ 1: \frac{V_1}{R_1} - \frac{V_a}{R_1} &= \frac{V_a}{Ls} + \frac{V_a}{R_2} - \frac{V_b}{R_2} \\ 2: \frac{V_a}{R_2} - \frac{V_b}{R_2} &= \frac{V_b}{\frac{1}{Cs}} \end{aligned}$$

Laplace transformasjon

Laplace transformasjon er en lineær matematisk operasjon som overfører en funksjon fra tidsdomenet til frekvensdomenet, også kalt s -domenet.

$$s = \sigma + j\omega$$

σ : decay rate

ω : frekvens

Fordeler med s -domenet:

- Konvolusjon (vanskelig) blir multiplikasjon (lett)
- Differensiallikninger (vanskelig) blir algebraiske likninger (lett)

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

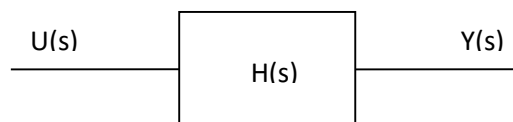
f(t)	F(s)	f(t)	F(s)
$\delta(t)$	1	1	$\frac{1}{s}$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$u_c(t) = u(t-c)$	$\frac{e^{-cs}}{s}$	$u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\int f(t)dt$	$\frac{1}{s}(F(s) - f(0))$	$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(0)$
$f^n(t)$		$s^n F(s) - s^{(n-1)}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$	

Transfer funksjon

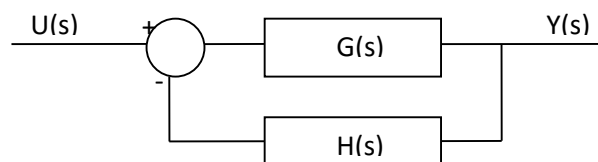
En transfer funksjon er definert som forholdet mellom et systems output og input. Benevningen vil være avhengig av benevningene til input og output.

$$Y(s) = H(s)U(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

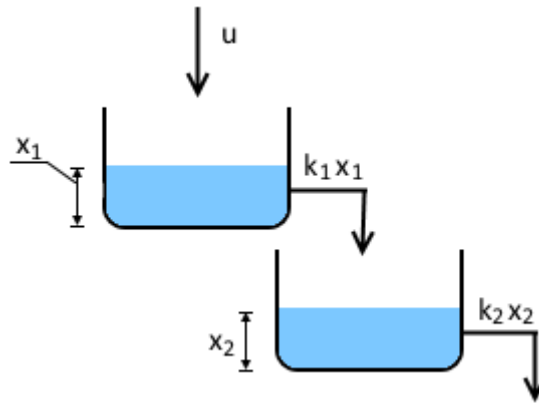


Closed-loop transfer funksjon



$$G_2(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Transfer funksjon fra modell



$$\begin{cases} A_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 = u \\ A_2 \dot{x}_2 + k_2 x_2 - k_1 x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1(A_1 s + k_1) = U \\ -X_1 k_1 + X_2(A_2 s + k_2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 A = U \\ -X_1 B + X_2 C = 0 \end{cases}$$

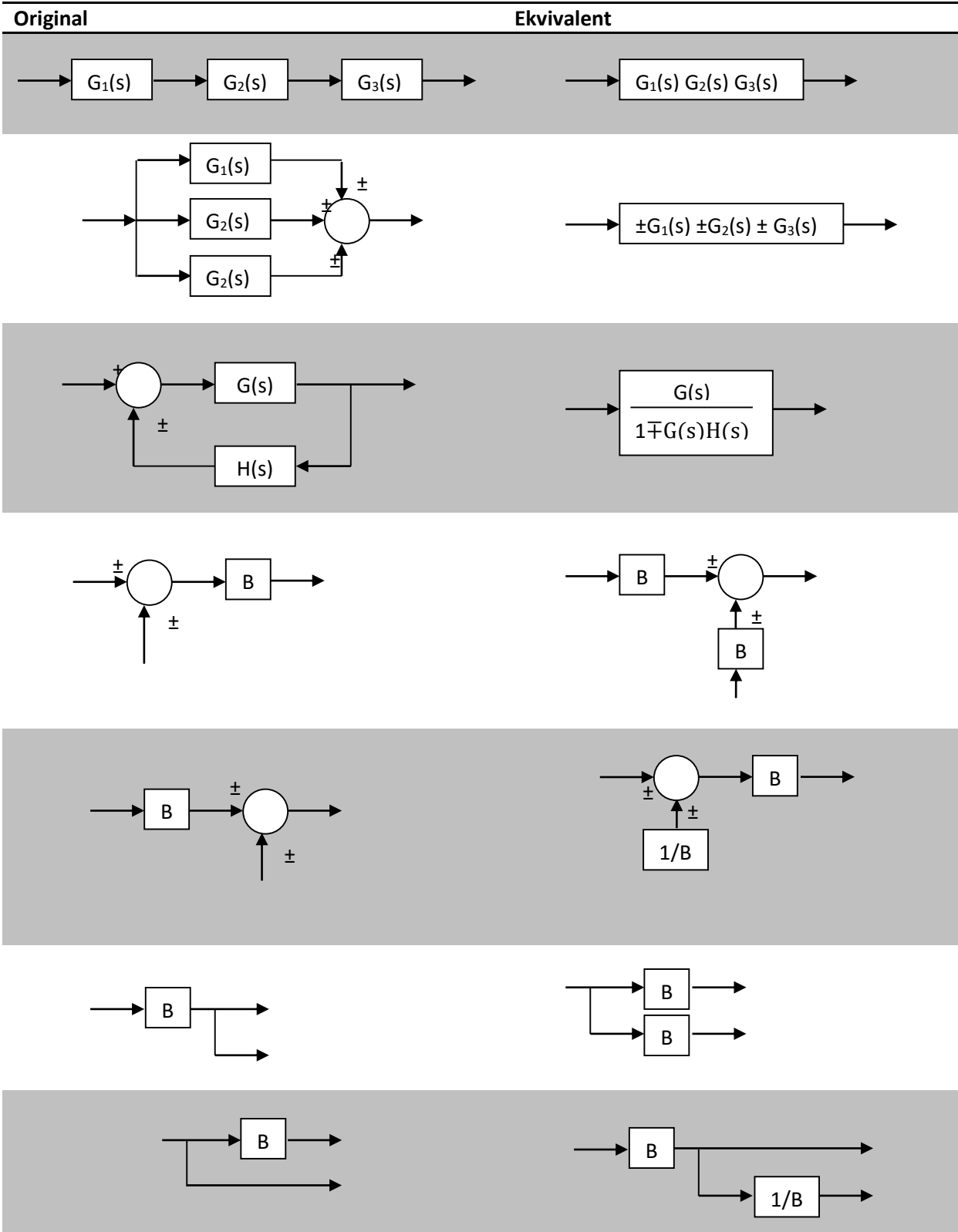
$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -B & C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{AC} \begin{bmatrix} C & 0 \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \frac{B}{AC} U = \frac{k_1}{(A_1 s + k_1)(A_2 s + k_2)} U$$

$$\frac{X_2}{U} = \frac{k_1}{(A_1 s + k_1)(A_2 s + k_2)} = \frac{k_1}{A_1 A_2 s^2 + (k_2 A_1 + k_1 A_2) s + k_1 k_2}$$

Blokkdiagram reduksjon



Sentrale formler

Sluttverdi teoremet (Final value theorem)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)I(s)$$

$I(s)$: Input funksjon (eks. $U(s)$)

Tids delay i s domenet, hvor a er forsinkelsen i sekunder

$$e^{-as}$$

Proportional gain fra magnitude gain adjust

$$K = 10^{\frac{G_{adj}}{20}}$$

Førstegrads system

Kommer på formen

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

eller

$$G(s) = \frac{K}{s + a}$$

Tidskonstant. Tiden det tar for systemets step response å nå 63,3% av final value.

$$\tau = \frac{1}{a}$$

Rise time

$$T_r = 2.2\tau$$

Settling time

$$T_s = 4\tau$$

Andregrads system

Kommer på formen

$$G(s) = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1}$$

eller

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Prosent overshoot

$$\%OS = 100 \cdot \exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

Damping ratio

$$\zeta = \frac{-\ln(\%OS/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln(\%OS/100)^2}}$$

- $\zeta < 1$: Underdamped
- $\zeta = 1$: Kritisk dempet
- $\zeta > 1$: Overdamped

Damped frequency

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Peak time.

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Settling time

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

Phase margin

$$\phi_M = \tan^{-1} \frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1 + 4\zeta^4}}}$$

Damping ratio

$$\zeta = \frac{\sin(\phi_M)}{2\sqrt{\cos(\phi_M)}} \quad 0 < \phi_M < 90^\circ$$

Bandwidth

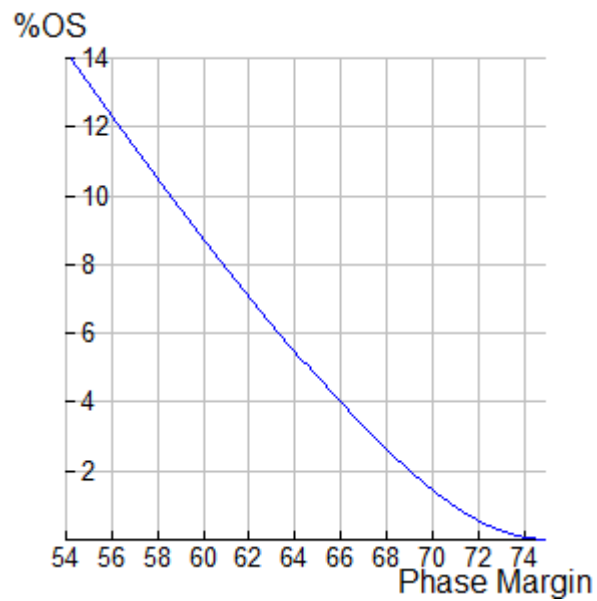
$$\omega_{BW} = \frac{4}{T_s \zeta} \sqrt{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}$$

$$\omega_{BW} = \frac{\pi}{T_p \sqrt{1 - \zeta^2}} \sqrt{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}$$

Overshoot approximation

$$\%OS \approx 70 - \phi_m$$

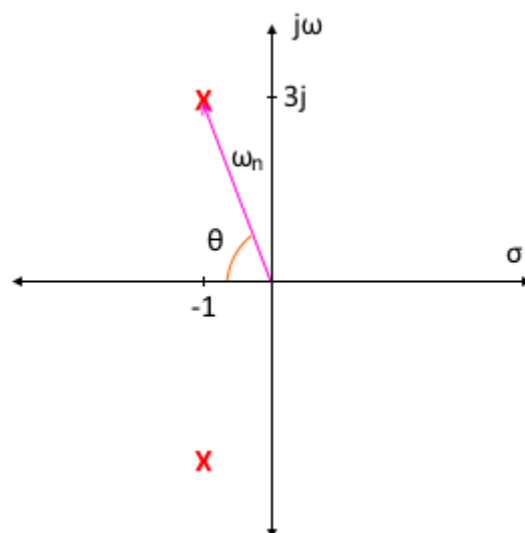
Prosent overshoot som funksjon av fasemargin



Poles og zeros

Poler og zeros av en transfer funksjon er frekvensene der verdiene av nevneren og telleren av transfer funksjonen blir 0 henholdsvis. Hvis det finnes positive poler er systemet ustabil. Hvis det finnes positive zeros må man sjekke nyquist stabilitets kriteriet for å vite om systemet er ustabil.

Hvis du vil forenkle uttrykket kan du gjøre en forenkling ved å neglisjere de polene som er mer enn 5 ganger så langt vekk fra origo enn den dominante polen. Den dominante polen er den polen som er lengst inn mot origo.



$$\zeta = \cos(\theta) = \frac{\text{Re}(p)}{\omega_n}$$

Vi har to metoder for å finne transfer funksjonen ut i fra poles/zeros plot.

Metode 1

$$p = -1 + 3j$$

$$G(s) = \frac{K}{(s-p)(s-\bar{p})} = \frac{K}{(s-(-1+3j))(s-(-1-3j))} = \frac{K}{s^2 + 2s + 10}$$

Metode 2

$$\omega_n = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$\zeta = \cos(\theta) = \frac{1}{\omega_n} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$G(s) = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1} = \frac{K}{\frac{s^2}{10} + \frac{2}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}}s + 1} = \frac{10K}{s^2 + 2s + 10}$$

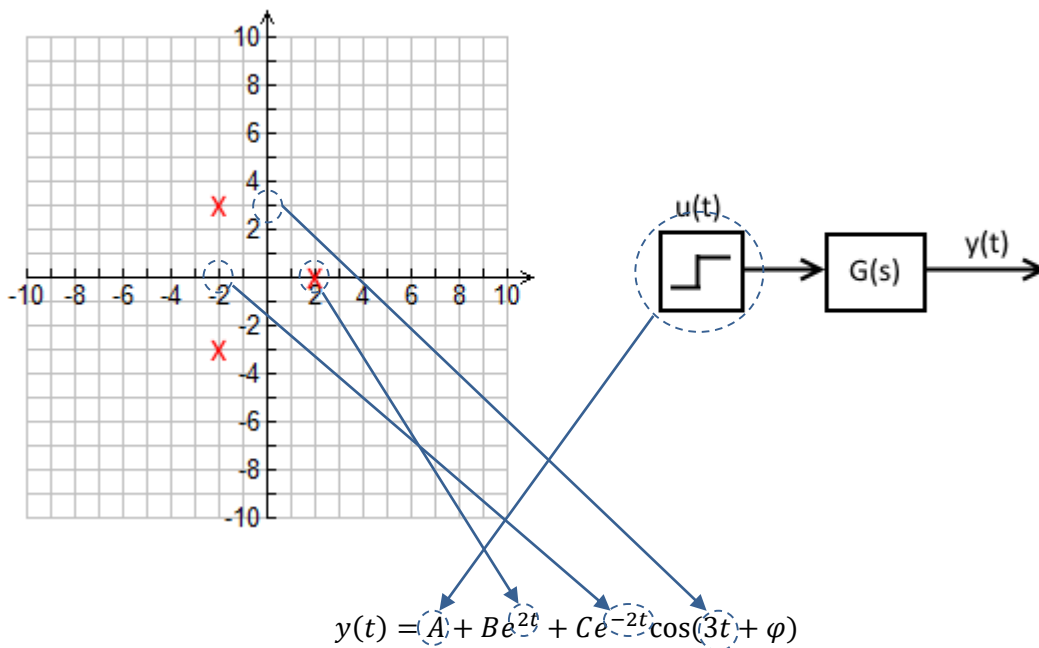
Flytting av poler

- Flytter man polene langs den vertikale (komplekse) akse så vil envelopen forbli den samme.
- Flytter man polene langs den horisontale (reelle) akse så vil frekvensen forbli den samme.
- Flytter man polene diagonalt så vil overshooten forbli den samme.

Step response

General form

$$G(s) = \frac{K}{(s-2)(s-(-2+3j))(s-(-2-3j))}$$



eller

$$y(t) = A + Be^{2t} + Ce^{-2t}\cos(3t) + De^{-2t}\sin(3t)$$

Finne konstantene

$$G(s) = \frac{8(s+2)}{(s+1)(s+4)(s+8)}$$

$$Y(s) = U(s)G(s) = \frac{1}{s} \frac{8(s+2)}{(s+1)(s+4)(s+8)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+4} + \frac{D}{s+8}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{8(s+2)}{(s+1)(s+4)(s+8)} = \frac{8 \cdot 2}{1 \cdot 4 \cdot 8} = \frac{1}{2}$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)Y(s) = \lim_{s \rightarrow -1} \left(\frac{1}{s} \frac{8(s+2)}{(s+4)(s+8)} \right) = \frac{8 \cdot (-1+2)}{-1 \cdot (-1+4) \cdot (-1+8)} = -\frac{8}{21}$$

$$C = \lim_{s \rightarrow -4} (s+4)Y(s) = \lim_{s \rightarrow -4} \left(\frac{1}{s} \frac{8(s+2)}{(s+1)(s+8)} \right) = \frac{8 \cdot (-4+2)}{-4 \cdot (-4+1) \cdot (-4+8)} = -\frac{1}{3}$$

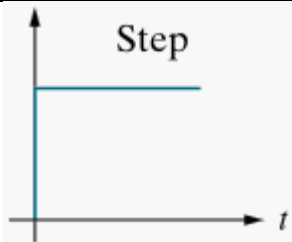
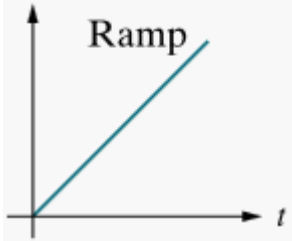
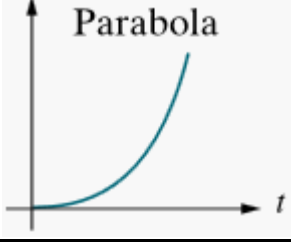
$$D = \lim_{s \rightarrow -8} (s+8)Y(s) = \lim_{s \rightarrow -8} \left(\frac{1}{s} \frac{8(s+2)}{(s+1)(s+4)} \right) = \frac{8 \cdot (-8+2)}{-8 \cdot (-8+1) \cdot (-8+4)} = -\frac{3}{14}$$

$$Y(s) = U(s) \left(A + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+4} + \frac{D}{s+8} \right) = U(s) \left(\frac{1}{2} - \frac{8}{21} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s+4} - \frac{3}{14} \cdot \frac{1}{s+8} \right)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = u(t) \left(\frac{1}{2} - \frac{8}{21} \cdot e^{-t} - \frac{1}{3} \cdot e^{-4t} - \frac{3}{14} \cdot e^{-8t} \right)$$

Steady-State Error

Input

Waveform	Fysisk tolkning	Tidsfunksjon	Laplace transformasjon	Symbol
	Konstant posisjon	$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$U(s)$
	Konstant hastighet	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$R(s)$
	Konstant akselerasjon	$\frac{1}{2}t^2u(t)$	$\frac{1}{s^3}$	$P(s)$

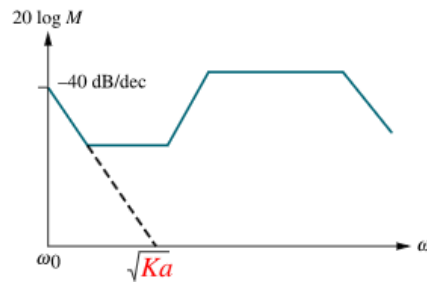
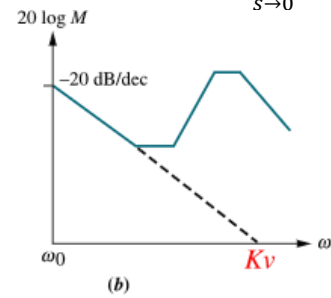
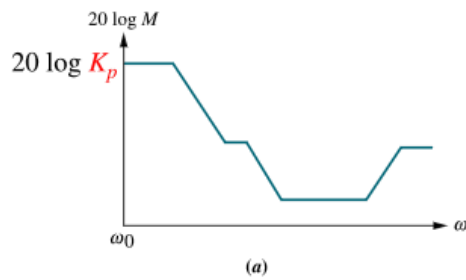
En rampe input med stigning 5m/s vil altså bli $\frac{5}{s^2}$ i s-domenet.

Error konstanter

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$$

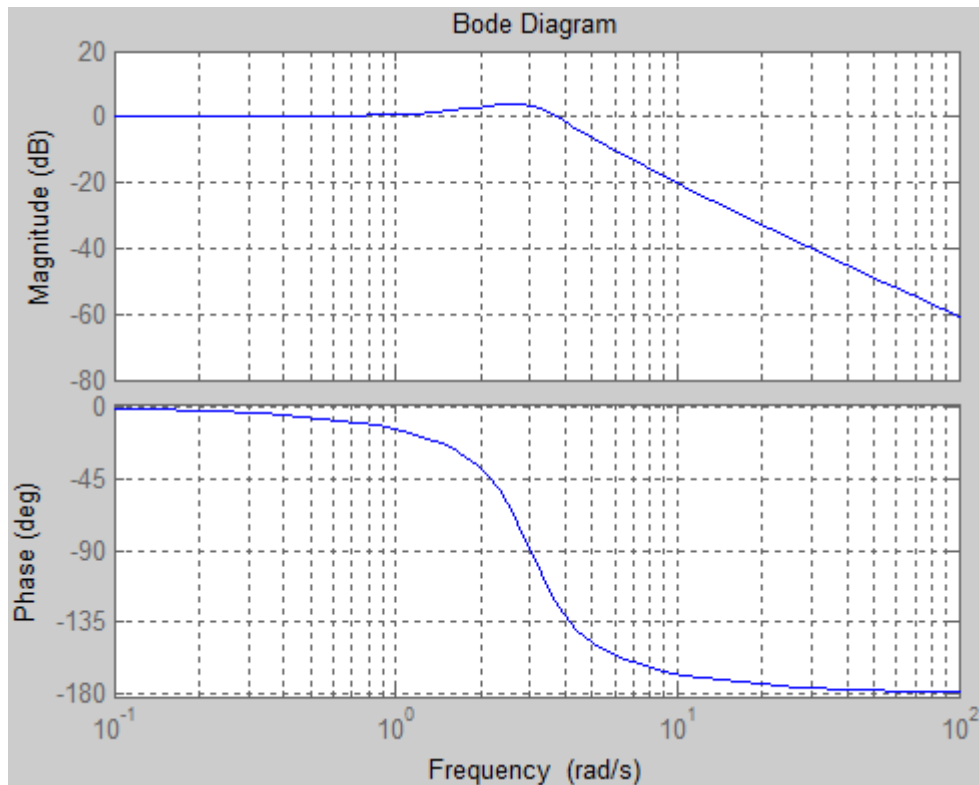


Steady state error

	Type 0		Type 1		Type 2	
	Error Constant	Error	Error Constant	Error	Error Constant	Error
Step	$K_p = C$	$\frac{R}{1 + K_p}$	$K_p = \infty$	0	$K_p = \infty$	0
Ramp	$K_v = 0$	∞	$K_v = C$	$\frac{R}{K_v}$	$K_v = \infty$	0
Parabola	$K_a = 0$	∞	$K_a = 0$	∞	$K_a = C$	$\frac{R}{K_a}$

Asymptotisk bode plot

Et bode plot er en graf av en transferfunksjon som viser magnitudo i dB og faseforskyvning av frekvens responsen. Desibel (dB) er en logaritmisk skala for å uttrykke hvor stor en verdi er i forhold til en referanse verdi. Et asymptotisk bode plot er en approksimering av det faktiske bode plottet.



Systemtypen m finner man ved å se på hvor mange rene integratorer systemet består av

$$\frac{K(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_k)}{s^m(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)}$$

Magnitude formel

$$M(\omega) = 20\log(|G(j\omega)|)$$

Fra bode plot til transfer funksjon

1. Lag tangenter på bode plottet som har en stigning som er delelig med 20.
2. Noter break frekvensen i de punktene der tangentene krysser.
3. Se break frekvens tabell for å avgjøre om det er første eller andregrads pole eller zero.
4. Verifiser at det er riktig avvik mellom asymptotisk og faktisk plot.
5. Finn gain faktoren ved å bruke magnitude formelen på den laveste frekvensen.

Finne fase og gain margin

1. Plot open loop bode plot av systemet.
2. Finn frekvensen ω_{GM} der fase grafen krysser -180°.
3. Gain margin er den negative differansen mellom magnitude ved ω_{GM} og 0 dB.
4. Finn frekvensen $\omega_{\Phi M}$ der magnitude grafen krysser 0 dB.
5. Fase marginen er differansen mellom fasen ved $\omega_{\Phi M}$ og -180°.

Forbedre egenskaper

- Øke båndbredde for å øke T_p og T_s , altså hastigheten til systemet.
- Øke phase margin for å minske overshoot.

Startverdier

Type 0: Regn ut magnituden ved $\omega = 0$ og start fasen ved 0° .

Type 1: Regn ut magnituden ved en frekvens mindre enn laveste break frekvens og start den med -20 dB/dec og start fasen ved -90° .

Type 2: Regn ut magnituden ved en frekvens mindre enn laveste break frekvens og start den med -40 dB/dec og start fasen ved -180° .

Magnitudo

$$G(s) = \frac{5(s + 2)}{s(2s + 1)}$$

$$G(0.1j) = \frac{5(0.1j + 2)}{0.1j(2 \cdot 0.1j + 2)} = -14.42 - 97.12j$$

$$M(0.1) = 20 \log(|G(0.1j)|) = 20 \log(\sqrt{(-14.42)^2 + (-97.12)^2}) = 98.18$$

Break frekvens

Break frekvens oppstår der den imaginære delen er lik den reelle.

$$G(s) = \frac{5(s + 2)}{s(2s + 1)}$$

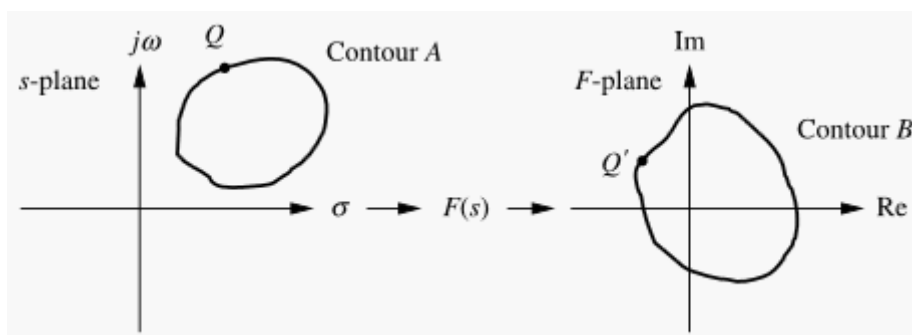
$G(s)$ har break frekvens ved 2 og 0.5.

Break ω	Førstegrads zero	Førstegrads pole	Andregrads zero	Andregrads pole
Magnitude slope	+20 dB/dec	-20 dB/dec	+40 dB/dec	-40 dB/dec
Phase (over 2 dekader)	+90°	-90°	+180°	-180°
Avvik fra faktisk plot	3 dB	-3 dB	6 dB	-6 dB

Nyquist stabilitets kriterium

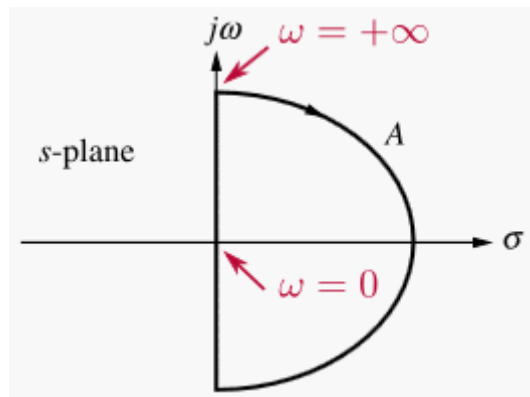
Contour

En vilkårlig contour A blir mappet til contour B av transferfunksjonen $F(s)$. Et vilkårlig punkt Q på contour A vil også ha en tilsvarende Q' på contour B.



- En zero utenfor contour A \Rightarrow contour B innsletter ikke origo.
- En pole utenfor contour A \Rightarrow contour B innsletter ikke origo.
- En zero innenfor contour A \Rightarrow contour B innsletter origo clockwise.
- En pole innenfor contour A \Rightarrow contour B innsletter origo counter-clockwise.
- En zero og en pole innenfor contour A \Rightarrow contour B innsletter ikke origo.

Nyquist contouret omfatter hele right half plane og blir brukt til å avgjøre om closed loop transfer funksjonen er stabil.



Kriteriet

$$Z = P - N$$

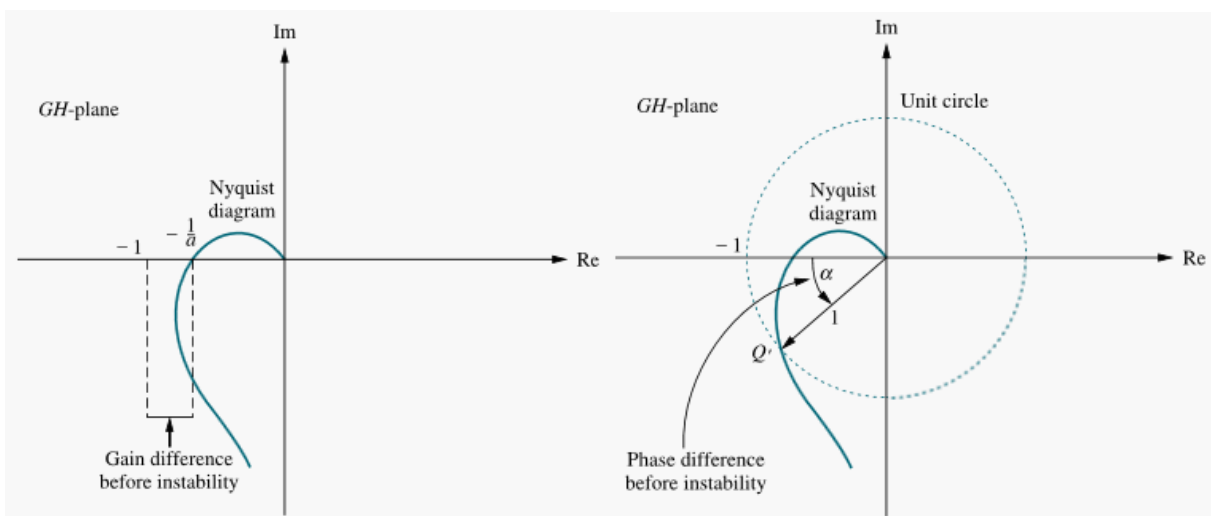
N: Antall counter-clockwise runder av open-loop transfer funksjonen rundt -1.

P: Antall open-loop poles i right half plane.

Z: Antall closed-loop poles i right half plane. (Eller zeros i $1+GH$)

Systemet er stabilt hvis det ikke er noen closed-loop poles i right half plane, altså at $Z = 0$.

Gain og phase margin



$$G_M = 20\log(a)$$

$$\phi_M = \alpha$$

Design av proportional controller

Har en open-loop transfer funksjon $G(s)$ og skal designe en P-controller med 9,5 % overshoot.

$$G(s) = \frac{100K}{s(s + 36)(s + 100)}$$

Bruker formel for å finne $\zeta = 0,5996$ og finner dermed $\phi_M = 59^\circ$ med formel. Leser av frekvensen der ønsket fase margin befinner seg. Og ser hvor mye negativ gain (G_{adj}) du må justere for at du skal få 0 dB magnitute ved denne frekvensen. Leser av at $G_{adj} = 55,5$ dB og regner ut gainen K.

$$K = 10^{\frac{G_{adj}}{20}} = 10^{\frac{55,5}{20}} = 595 \Rightarrow G(s) = \frac{59500}{s(s + 36)(s + 100)}$$

Bruker step response av closed-loop transfer funksjonen for å verifisere overshoot.

Lag/Lead kompensator

Lag kompensatorer er bra til å forbedre presisjonen til systemet. Den reduserer steady-state error, men reduserer også båndbredden. Lead kompensatorer øker hastigheten til systemet. En Lead-lag kompensator er begge kombinert. Når man designer en lead-lag kompensator er det viktig at de opererer i forskjellige frekvens områder. Design lag først for å tilfredsstillte steady state kravet og deretter lead for å forbedre båndbredden.

Lag kompensator

$$\alpha > 1$$

$$G_{Lag}(s) = \alpha \left(\frac{s + 0.1\omega_p}{s + 0.1\alpha\omega_p} \right)$$

$$\alpha = 10^{\frac{G_{adj}}{20}}$$

$$\omega_m = \frac{1}{\omega_p \sqrt{\alpha}}$$

ω_p : Frekvensen ved ϕ_{Md}

ω_m : Frekvensen med max phase lag

Eksempel

Vil designe en P og lag kompensator som har 12 % overshoot og avviket skal være mindre enn 0.1.

$$G(s) = \frac{50K}{s(s + 5)}$$

Finner gain som tilfredsstillte steady state error kravet.

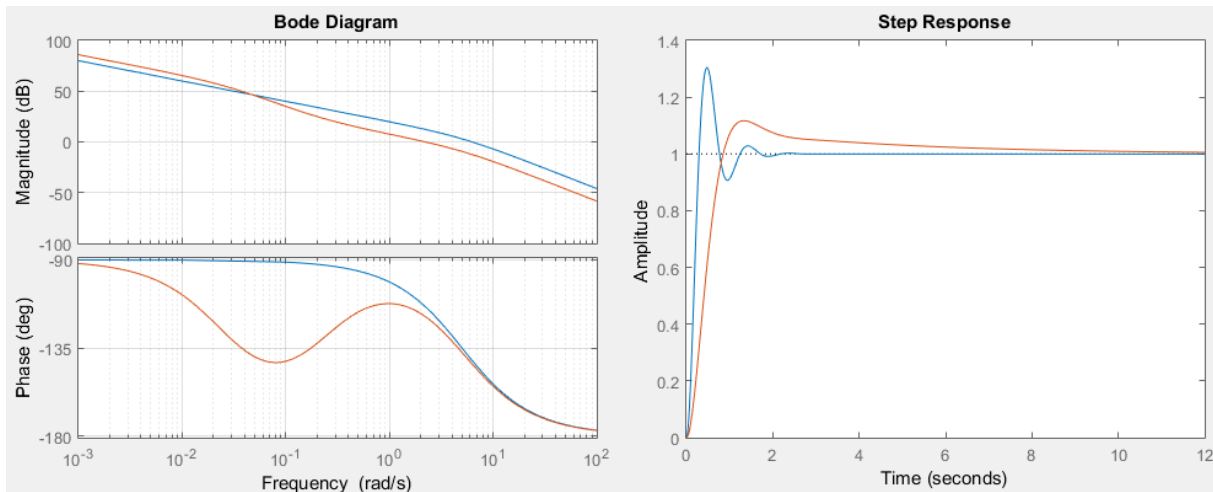
$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} \Rightarrow K_v = \frac{1}{e_{ss}} = \frac{1}{0.1} = 10$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \frac{K}{(0 + 5)} = \frac{K}{5} \Rightarrow K = \frac{K_v}{5} = 2$$

Bruker formler eller les av graf for å finne ønsket $\phi_{Md} = 56^\circ$. Legg på 5° - 12° på grunn av påvirkning av kompensatoren og få $\phi_{Md} = 66^\circ$. Plot bode plottet for $G(s)$ og bruk phase margin til å finne $G_{adj} = -18.4$ dB og phase margin frekvens $\omega_p = 2.23$ rad/s.

$$\alpha = 10^{\frac{G_{adj}}{20}} = 10^{\frac{-18.4}{20}} = 0.120$$

$$G_{lag}(s) = \alpha \left(\frac{s + 0.1\omega_p}{s + 0.1\alpha\omega_p} \right) = 0.120 \left(\frac{s + 0.223}{s + 0.027} \right)$$



Lead kompensator

$$\beta < 1$$

$$G_{Lead}(s) = \frac{1}{\beta} \left(\frac{s + \frac{1}{\omega_p}}{s + \frac{1}{\beta\omega_p}} \right)$$

$$|G_C(j\omega_m)| = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$$

$$\beta = \left(\frac{1 - \sin(\phi_{max})}{1 + \sin(\phi_{max})} \right)$$

$$\phi_{max} = \sin^{-1} \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)$$

$$\phi_{max} = \phi_{Md} - \phi_M + 10^\circ$$

$$\omega_m = \frac{1}{\omega_p \sqrt{\beta}}$$

Eksempel

Vi skal designe en P og lead kompensator for $G(s)$ som gir mindre enn 10% overshoot og den skal kunne følge en rampe med stigning 12 cm/s med et avvik på mindre enn 0.1 mm.

$$G(s) = \frac{15K}{s(0.1s + 1)}$$

Finner gain som tilfredsstiller steady state error kravet.

$$e_{ss} = \frac{R}{K_v} \Rightarrow K_v = \frac{R}{e_{ss}} = \frac{120}{0.1} = 1200$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = 15K \Rightarrow K = \frac{K_v}{15} = \frac{1200}{15} = 80$$

Bruker formler eller les av graf for å finne $\phi_{Md} = 59^\circ$ og trekker fra den eksisterende fasemarginen. Men på grunn av at båndbredden øker må vi øke fasemarginen med 5° - 12° .

$$\phi_{max} = \phi_{Md} - \phi_M + 10^\circ = 59^\circ - 5^\circ + 10^\circ = 64^\circ$$

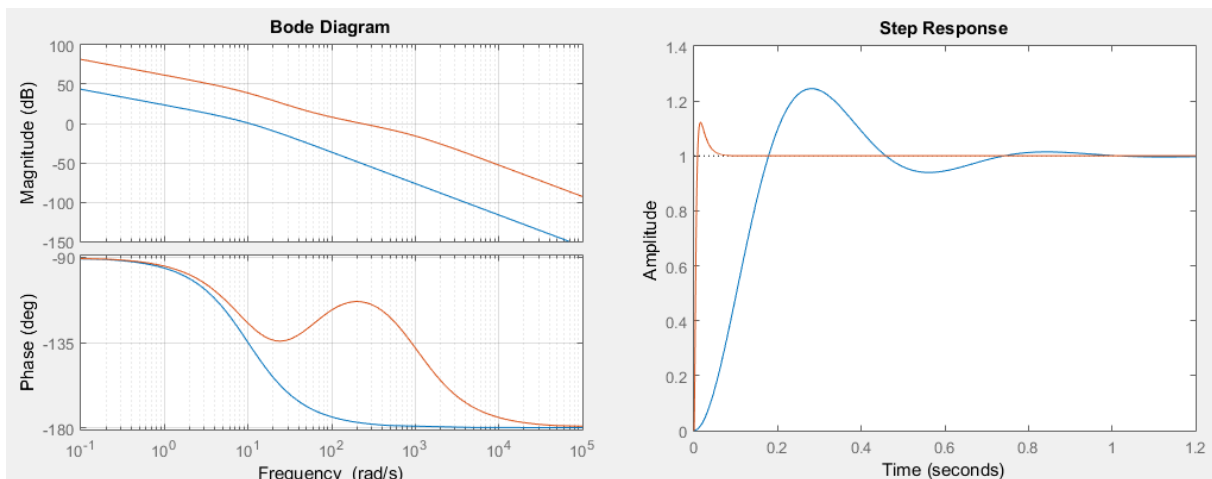
$$\beta = \frac{1 - \sin(\phi_{max})}{1 + \sin(\phi_{max})} = \frac{1 - \sin(64^\circ)}{1 + \sin(64^\circ)} = 0.0533$$

$$20 \log(|G(j\omega_m)|) = 20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right) = 20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{0.0533}}\right) = 12.7 \text{ dB}$$

Går til -12.7 dB på bode plottet og leser av $\omega_m = 228 \text{ rad/s}$.

$$\omega_p = \frac{1}{\omega_m \sqrt{\beta}} = \frac{1}{228 \sqrt{0.0533}} = 0.0190$$

$$G_{Lead}(s) = \frac{1}{\beta} \left(\frac{s + \frac{1}{\omega_p}}{s + \frac{1}{\beta \omega_p}} \right) = 18.76 \left(\frac{s + 52.64}{s + 987.58} \right)$$



Matlab

Transfer funksjon

```
H = tf([1,2],[1,2,3])  
  
s = tf('s');  
H = (s+1)/(s^2+2s+3)
```

Bode plot

```
bode(H)  
grid on
```

Bode plot mellom 10^{-1} og 10^1

```
bode(H, {0.1, 10})
```

Open Loop til closed loop

```
Y = feedback(G, H)
```

Flere bode plot på en graf

```
bode(G)  
hold on  
bode(H)
```

Zero-pole plot

```
pzmap(H)  
sgrid  
grid on
```

Nyquist diagram

```
nyquist(G)  
grid on
```

Peak gain in dB

```
mag2db(getPeakGain(H))
```

Step response

```
step(H)
```


Referanser

- [1] Stanford University, [Online]. Available:
<http://web.stanford.edu/class/ee122/Handouts/splanereview.pdf>.
- [2] F. Haugen, Reguleringsteknikk, Akademika, 2012.
- [3] Wikipedia, "Decibel," 27 Oktober 2015. [Online]. Available: <http://en.wikipedia.org/wiki/Decibel>.
- [4] liquidtensionxpr, "Session 02 - Part 2: Understanding the Decibel," 17 November 2010. [Online]. Available: <http://www.youtube.com/watch?v=qWLMR7-a-nY> .
- [5] D. J. Choi, "Steady-state error," 14 Mars 2011. [Online]. Available:
http://www.egr.msu.edu/classes/me451/jchoi/2012/notes/ME451_L13_SteadyStateError.pdf.
- [6] B. Douglas, "Control System Lectures - Bode Plots, Introduction," 11 Oktober 2012. [Online]. Available: http://www.youtube.com/watch?v=_eh1conN6YM .
- [7] M. Choux, *MAS107 lecture slides*, 2014.
- [8] National Instruments, "Teach Tough Concepts: Frequency Domain in Measurements," 03 August 2012. [Online]. Available: <http://www.ni.com/white-paper/13042/en/>.